Ich kann Aufgaben in wirtschaftlichem Kontext mit Kosten-, Nachfrage-, Erlös- und Gewinnfunktion modellieren.

A, B **1** Für ein bestimmtes Produkt wurden ein Höchstpreis von 22€ und eine Sättigungsmenge von 10 000 Stück ermittelt. Ermittle die lineare Nachfragefunktion.

A, B, C **2** Ein Betrieb arbeitet mit der Kostenfunktion $\overline{K}(x) = 0{,}07x^2 - 2{,}8x + 50 + \frac{750}{x}$, der Erlös wird durch die Erlösfunktion E mit $E(x) = -3{,}8x^2 + 250x$ beschrieben.

a. Ermittle die Gesamtkostenfunktion.

b. Berechne die Schnittstellen der Graphen von Erlösfunktion und Kostenfunktion.

c. Interpretiere das Ergebnis aus Aufgabe **b.** im Sachzusammenhang.

d. Berechne den Cournotschen Punkt und interpretiere seine Koordinaten im Sachzusammenhang.

A, B, C **3** Ein Betrieb arbeitet mit der Kostenfunktion $K(x) = 0{,}068x^3 - 2{,}5x^2 + 40x + 1000$.

a. Ermittle jene Menge x_M, bei der die variablen Stückkosten minimal sind.

b. Interpretiere den Wert $\overline{K}_V(x_M)$ im Sachzusammenhang.

c. Ermittle die Kostenkehre.

A, B, C **4** In einem Fitnessstudio werden individuell gestaltete Einzel-Trainings angeboten. Die Fixkosten für die Raummiete pro Monat betragen 350€. Zusätzlich fallen pro gebuchter Trainingseinheit 40€ an Kosten an. Eine Umfrage unter den Studiokundinnen und –kunden hat ergeben, dass bei einem Preis von 100€ pro Stunde nur 10 Personen, bei einem Preis von 60€ pro Stunde bereits 30 Personen bereit wären, ein Einzel-Training zu buchen.

a. Ermittle die lineare Kostenfunktion K.

b. Ermittle die lineare Nachfragefunktion p_N.

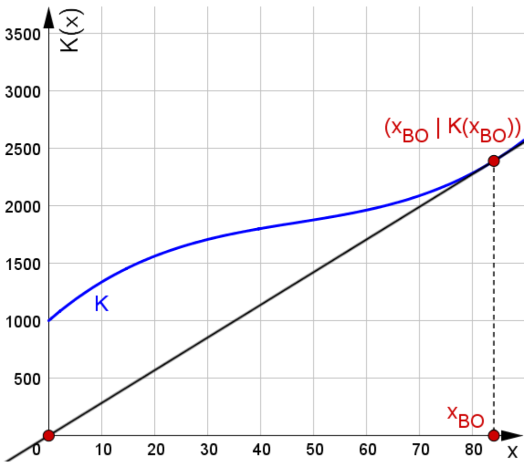
c. Stelle die Erlösfunktion E und die Gewinnfunktion G auf.

d. Ermittle den Stundenpreis, bei dem das Studio maximalen Gewinn erzielt.

A, C **5** Im Diagramm ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}005x^3 - 0{,}7x^2 + 40x + 1000$ dargestellt. Durch Einzeichnen jener Tangente an K, die durch den Ursprung verläuft, wurde das Betriebsoptimum graphisch ermittelt.

a. Erkläre, wie man das Betriebsoptimum rechnerisch bestimmen kann.

b. Beschreibe, welche Auswirkungen es für einen Betrieb hat, wenn als Verkaufspreis der Stückkostenpreis am Betriebsoptimum gewählt wird.



Lösungen zu:
Ich kann Aufgaben in wirtschaftlichem Kontext mit Kosten-, Nachfrage-, Erlös- und Gewinnfunktionen modellieren.

1 lineare Nachfragefunktion: $p_N(x) = -\frac{11}{5000} + 22$

2 **a.** Gesamtkostenfunktion: $K(x) = 0{,}07x^3 - 2{,}8x^2 + 50x + 750$

b. Schnittstellen: $x_1 = 3{,}84...$ ME, $x_2 = 44{,}50...$ ME

c. An den beiden Schnittstellen sind Erlös und Kosten gleich hoch, daher ist der Gewinn hier 0. Zwischen den beiden Schnittstellen von Erlös- und Kostenfunktion liegt der Gewinnbereich, das heißt dieser liegt etwa zwischen 4 und 44 ME. Die kleinere Nullstelle wird als Break-Even-Point, die größere als Gewinngrenze bezeichnet.

d. Cournotschen Punkt: $(26{,}5 \text{ ME} \mid 149{,}5 \text{ GE/ME})$. Die x-Koordinate des Cournotschen Punktes gibt die gewinnmaximale Menge an, die y-Koordinate gibt den zugehörigen Verkaufspreis an.
[Löse $G'(x) = 0 \Rightarrow x \approx 26{,}5$. Berechne $p(26{,}5) \approx 149{,}5$, wobei $p(x) = -3{,}8x + 250$.]

3 **a.** $x_M = 18{,}4$ ME (= Betriebsminimum) [Löse $\bar{K}_V'(x_M) = 0$.]

b. Der Wert $\bar{K}_V(x_M)$ gibt die kurzfristige Preisuntergrenze an. Wenn der Verkaufspreis gleich $\bar{K}_V(x_M)$ ist, sind gerade noch die variablen Kosten gedeckt. Der Betrieb wird dann Minimalbetrieb genannt.

c. Kostenkehre bei $x = 12{,}3$ ME [Löse $K''(x) = 0$.]

4 **a.** $K(x) = 40x + 350$

b. $p_N(x) = -2x + 120$

c. Erlösfunktion: $E(x) = -2x^2 + 120x$; Gewinnfunktion: $G(x) = -2x^2 + 80x - 350$

d. Der Stundenpreis, bei dem das Studio den maximalen Gewinn erzielt, ist $p_N(20) = 80€$. [Die gewinnmaximale Menge erhält man, in dem man $G'(x) = 0$ löst.]

5 **a.** Das Betriebsoptimum ist die Minimalstelle der Durchschnittskostenfunktion. Um die Minimalstelle zu erhalten, muss man zunächst die Durchschnittskostenfunktion $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ ermitteln, und dann die Gleichung $\bar{K}'(x) = 0$ lösen.

b. Ist der Verkaufspreis gleich den minimalen Durchschnittskosten, so sind im Betriebsoptimum gerade noch die Produktionskosten gedeckt. Dieser Verkaufspreis wird als langfristige Preisuntergrenze bezeichnet, der Betrieb ist dann ein Grenzbetrieb.

Autorin: Bettina Ponleitner