

## 34 Das moderne Atommodell

### Vertiefung und Kompetenzüberprüfung

Martin Apolin (Stand Februar 2012)

#### Atommodelle vor der Quantenmechanik

**A1** In Abb. 1 siehst du die Auswertung der Streuversuche von  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie. Wie groß ist statistisch gesehen das Verhältnis der Teilchen, die um  $20^\circ$  bzw.  $120^\circ$  abgelenkt werden? Erkläre mit Hilfe der Grafik, warum man sehr viele Teilchen durch die Folie schießen muss, um auch starke Ablenkungen zu erhalten.

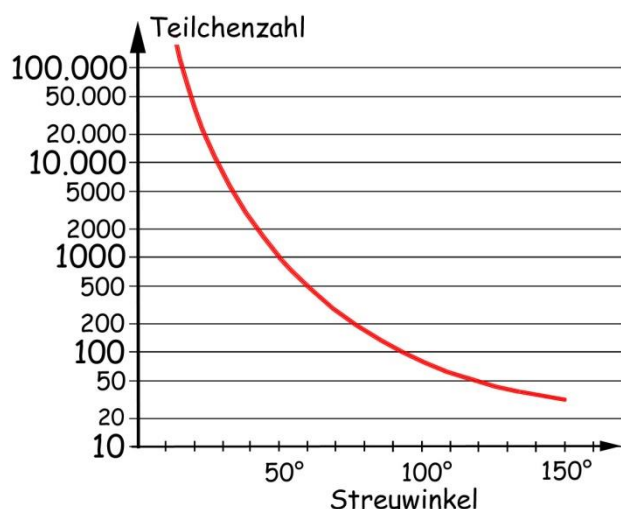


Abb.1: Auswertung der Streuversuche von  $\alpha$ -Teilchen an einer Goldfolie (Grafik: Martin Apolin).

**A2 a** Berechne den Durchmesser eines Gold-Atomkerns mit Hilfe der Formel  $r \approx 1,2 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{A}$  m (siehe Kap. 45.1, S. 54, BB8), wobei  $A$  die Massenzahl (Atomgewicht) des Elements darstellt. Verwende dazu Abbildung 2.

		Gruppe					
		7	8	9	10	11	12
Ordnungszahl	Symbol	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn
Name	1 Wasserstoff	Mangan	Eisen	Cobalt	Nickel	Kupfer	Zink
Atomgewicht	1,0079	54,938	55,845	58,933	58,693	63,546	65,38
Elektronen-konfiguration	1	2/8/13/2	2/8/14/2	2/8/15/2	2/8/16/2	2/8/18/1	2/8/18/2
		43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd
		Technetium	Ruthenium	Rhodium	Palladium	Silber	Cadmium
		98,91	101,07	102,91	106,42	107,87	112,41
		2/8/18/13/2	2/8/18/15/1	2/8/18/16/1	2/8/18/18	2/8/18/18/1	2/8/18/18/2
		75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg
		Rhenium	Osmium	Iridium	Platin	Gold	Quecksilber
		186,21	190,23	192,22	195,08	196,97	200,59
		2/8/18/32/13/2	2/8/18/32/14/2	2/8/18/32/15/2	2/8/18/32/17/1	2/8/18/32/18/1	2/8/18/32/18/2

Abb. 2: Ausschnitt aus dem Periodensystem der Elemente (Quelle: Wikipedia).

**A2 b** Atome haben keine festen Grenzen. Man kann aber in Festkörpern den Atomdurchmesser abschätzen. Nimm dazu exemplarisch Gold (Dichte  $\rho = 19,3 \text{ g/cm}^3$ ) und gehe folgendermaßen vor:

- 1) Berechne zuerst die Masse von einem Mol Gold. Ein Mol hat  $6 \cdot 10^{23}$  Teilchen. Die Massenzahl  $A$  eines Stoffes gibt auch gleichzeitig die Molmasse in Gramm an.
- 2) Nimm an, dass jedes Atom einen würfelförmigen Raum beansprucht und berechne die Seitenlänge des „Atom-Würfels“. Setze diese Seitenlänge gleich dem Durchmesser des Goldatoms.

**A2 c** In welchem Verhältnis stehen die Größe des Atomkerns von Gold und die des gesamten Atoms? Wie groß wäre das Atom, wenn der Kern 1 cm groß wäre?

**A3 a** Berechne die Geschwindigkeit, die ein Elektron im Rahmen des Bohr'schen Atommodells im „Orbit“ haben müsste. Gehe dazu von der Zentripetalkraft  $F_{ZP} = \frac{mv^2}{r}$  (siehe Kap. 11.6, BB5) und der Coulombkraft  $F_E = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$  (Kap. 23.1.3, BB6) aus. Der Bohr-Radius für ein Wasserstoffatom beträgt  $0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , die Ladung der Elektronen und Protonen beträgt  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , die Masse des Elektrons rund  $10^{-30} \text{ kg}$  und  $k$  ist etwa  $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ .

**A3 b** Wie groß ist die Kreisfrequenz des Elektrons in der „Umlaufbahn“ um den Kern? Verwende das Ergebnis aus A3 a. Es gilt  $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} r = 2\pi f r$ . Vergleiche das Ergebnis mit der Frequenz von Licht (Tab. 1). Was kann man daraus folgern bzw. nicht folgern?

	relative Photonenenergie	Wellenlänge in $10^{-7} \text{ m}$	Frequenz $10^{14} \text{ Hz}$
rot	1–1,2	6,5–7,5	4,0–4,6
grün	1,3–1,5	4,9–5,8	5,2–6,1
blau	1,5–1,8	4,2–4,9	6,1–7,1
UV-A	1,9–2,3	3,2–4,0	7,5–9,38
UV-B	2,3–2,7	2,8–3,2	9,38–10,7

Tab. 1: Relative Photonenenergie von sichtbarem und ultraviolettem Licht (siehe auch Tab. 30.1, S.31).

**A4** Beschleunigte elektrische Ladungen senden immer elektromagnetische Wellen aus (siehe Kap. 33.1, BB7). Weil im Bohr'schen Atommodell die Elektronen in der Kreisbahn um den Atomkern ebenfalls beschleunigt wären (Zentripetalbeschleunigung; siehe Kap. 7.4.4, S. 66, BB5), träge dies

auch hier zu. Durch die elektromagnetische Strahlung würden die Elektronen Energie verlieren und auf einer Spiralbahn in den Kern stürzen (siehe Abb. 3).

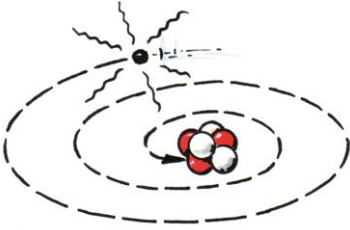


Abb. 3: Würden Elektronen tatsächlich wie Planeten um den Kern kreisen, würden sie elektromagnetische Strahlung aussenden, dabei Energie verlieren und schließlich in den Kern fallen (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 34.3, S. 67).

Schätze die Zeitdauer für den Kollaps eines Wasserstoffatoms ab. Nimm dazu die Formel für die Strahlungsleistung eines beschleunigten Elektrons:  $P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$ .  $e$  ist die Ladung des Elektrons ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  C),  $a = v^2/r$  die Zentripetalbeschleunigung,  $\epsilon_0$  die elektrische Feldkonstante mit  $8,9 \cdot 10^{12}$  As/(Vm) und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ( $3 \cdot 10^8$  m/s). Für die Schätzung benötigst du weiters den Bohr-Radius für ein Wasserstoffatom ( $0,53 \cdot 10^{-10}$  m), die Masse des Elektrons ( $10^{-30}$  kg) und die Formel für die kinetische Energie  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ . Nimm vereinfacht an, dass Kreisfrequenz und Abstand zum Kern immer gleich groß sind und verwende das Ergebnis aus A3 a.

### Das Wasserstoffatom

A5 Nimm an, du willst über den Daumen abschätzen, wie viele Kugeln sich im runden Behälter befinden (siehe Abb. 4), und du gibst das Ergebnis in  $x \pm \Delta x$  an. Wie groß kann allgemein gesehen  $\Delta x$  im Vergleich zu  $x$  sein, damit deine Aussage noch sinnvoll ist? Es geht nur ums Prinzip, nicht um eine konkrete Zahl! Welcher Zusammenhang zur Quantenmechanik und besonders zur Lokalisationsenergie besteht dabei?



Abb. 4 zu A5 (Foto: Andreas Praefcke; Quelle Wikipedia)

A6 Die Gesamtenergie des Elektrons im Wasserstoffatom ist  $E = E_k + E_p$ . Die potenzielle Energie ergibt sich aus  $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ . Die kinetische Energie bzw. die Lokalisationsenergie ist  $E_k = \frac{h^2}{32m\pi^2 r^2}$  (siehe Infobox Lokalisationsenergie, S. 69). Berechne den Atomradius des Wasserstoffatoms, indem du differenzierst und  $dE/dr = 0$  setzt.

A7 Wie würden sich die Atomradien und die Dichte der Materie verändern, wenn das Planck'sche Wirkungsquantum um den Faktor 10 größer oder kleiner wären? Verwende für deine Überlegungen die Formel für  $r$  aus A6.

A8 Der Energieerhaltungssatz besagt, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Sie kann lediglich ihre Erscheinungsform ändern. Wie lässt sich aber der Energieerhaltungssatz mit der Lokalisationsenergie vereinbaren? Hier bekommt das Elektron doch durch die Annäherung an den Atomkern scheinbar aus dem Nichts Energie!

A9 a Was versteht man unter einem Elektronvolt?

b Welche Spannung herrscht zwischen dem Proton und dem Elektron in einem Wasserstoffatom? Hilf dir mit Abb. 5 und mit A9 a.



Abb. 5: a) Das Elektron des Wasserstoffs befindet sich als „Wolke“ um das Proton. b) Das Elektron wird vom Atomkern abgelöst. Dazu braucht man 13,6 eV (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 35.5, S. 79).

### Orbitale des Wasserstoffatoms

A10 In Abb. 6 auf der nächsten Seite siehst du bei a die Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons im 1s-Orbital. Es ist eine eindimensionale Darstellung. Das Diagramm gibt also an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, das Elektron bei einer Messung entlang *einer bestimmten Richtung* (sagen wir in x-Richtung) im Abstand  $r$  anzutreffen. Bei b ist die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte eingezeichnet. Sie gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, das Elektron in *einer beliebigen Richtung* in einem bestimmten Abstand  $r$  zum

Kern anzutreffen. Anders gesagt: Es ist angegeben, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, das Elektron in der Kugelschale zwischen  $r$  und  $r + dr$  (d. h.  $\Delta V = 4\pi r^2 dr$ ) anzutreffen! Das Maximum dieser Funktion entspricht dem Bohr'schen Atomradius. Wie ist der scheinbare Widerspruch zwischen diesen beiden Abbildungen zu erklären? Wo ist das Elektron nun eher anzutreffen: im Atomkern oder beim Bohr'schen Radius?

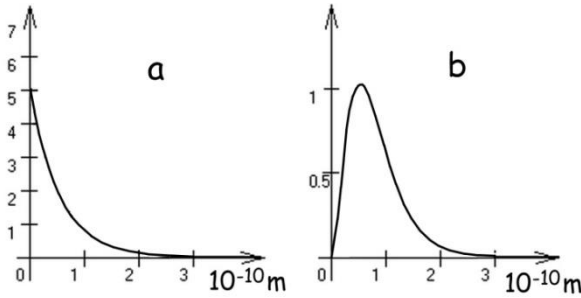


Abb. 6: a Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons im eindimensionalen Fall; b radiale Wahrscheinlichkeitsdichte im dreidimensionalen Fall (Grafik: Martin Apolin).

**A11** Die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons im 1s-Orbital wird durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$P = \frac{4r^2}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}}$ .  $P(\Delta r) = P(r)\Delta r$  ergibt dann die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Bereich  $[r - \Delta r, r + \Delta r]$  anzutreffen. Dabei ist  $a_0$  der Bohr'sche Radius. Zeige, dass bei diesem Radius das Maximum der Wahrscheinlichkeit liegt. Dazu musst du die Gleichung nach  $r$  differenzieren und null setzen.

**A12 a** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron im 1s-Orbital im Bereich  $\pm a_0$  um den Bohr'schen Atomradius befindet ( $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$  m), weiters im Bereich  $\pm a_0$  um  $5a_0$ ,  $10a_0$ ,  $20a_0$ ,  $100a_0$  und  $300a_0$ . Benutze dazu die Gleichung für  $P(\Delta r)$  aus A11 und erstelle eine Tabelle. Was fällt dir auf?

Abstand (Intervall $\pm a_0$ )	$P(\Delta r)$
$a_0$ ( $0,53 \cdot 10^{-10}$ m)	
$5a_0$	
$10a_0$	
$20a_0$	
$100a_0$	
$300a_0$	

Tab. 2 zu A12 a

**A12 b** Sinkt die Wahrscheinlichkeit, das Elektron bei einer Messung zu finden, in einer bestimmten Entfernung zum Atomkern irgendwann auf null ab? Überlege mit Hilfe der Gleichung für  $P$  aus A11. Was hat das für eine absurde Folge?

**A13** Die Dichte von festem Wasserstoff liegt bei 70,6 g/l. Schätze damit den Radius des Wasserstoffatoms ab. Gehe dazu wie in A2 b vor.

**A14** Welchen Atomradius hat ein Wasserstoffatom nun „wirklich“? Die Lösungen bei A6, A11 und A13 ergeben ja jeweils andere Werte! Erkläre weiters die Feststellung „Die Elektronenhülle hat keine Haut“.

**Elektronenspin und Pauli-Verbot**

**A15** Herbert Pietschmann schreibt in seinem Buch „Geschichten zur Teilchenphysik“ (Ibera 2007, S. 85) folgendes: „In der Quantenwelt haben wir oft keine Wahl. Entweder wir machen uns gar keine Vorstellungen (was für optische Menschen schwierig ist), oder unsere Vorstellungen sind falsch. Der einzige Ausweg ist, sich eine falsche Vorstellung zu machen und immer dazu zu denken, wo sie falsch ist.“ Wende dieses Zitat auf den Elektronenspin an.

**A16** Wie beeinflusst das Pauli-Verbot den Schalenbau der Atome? Warum verleiht es den Elementen ihre chemischen Eigenschaften?

**A17** Man kann alle Teilchen dieses Universums anhand ihres Spins in zwei Gruppen einteilen: solche mit halbzahligem Spin, die Fermionen, und solche mit ganzzahligem Spin, die Bosonen (Tab. 3). Was würde mit Licht passieren, wenn Photonen ebenfalls Fermionen wären (natürlich kann das niemals passieren)?

Fermionen	Bosonen
Für diese gilt das Pauli-Verbot. Sie sind nach dem italienischen Physiker ENRICO FERMI benannt.	Für diese gilt das Pauli-Verbot nicht. Sie sind nach dem indischen Physiker SATYENDRA NATH BOSE benannt.
Elektron, Spin $\frac{1}{2}$ Proton, Spin $\frac{1}{2}$ Neutron, Spin $\frac{1}{2}$	Photon, Spin 1

Tabelle 3: Die prominentesten Fermionen und Bosonen.

**A18** Erkläre, wie die Zacken in Abb. 7 zu Stande kommen! Warum steigt die Höhe der Zacken immer mehr an? Warum sinkt der Durchmesser der Atome zwischen den Zacken jedoch wieder ab? Warum hat etwa Helium einen kleineren Durchmesser als Wasserstoff?

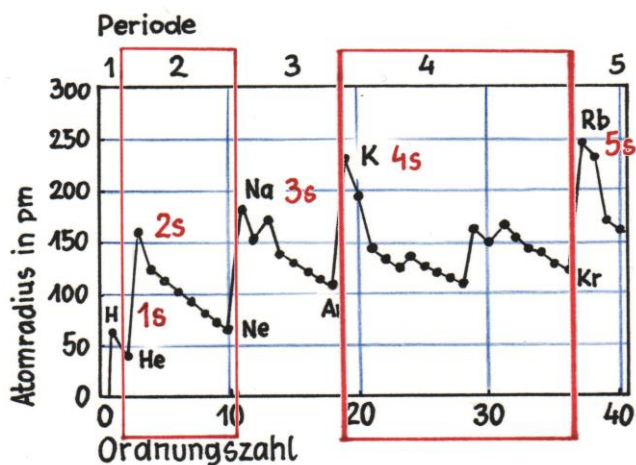


Abb. 7: Ordnungszahl und Atomgröße der Elemente (Grafik: Janosch Slama; siehe auch Abb. 34.24, S. 74).

### Das Periodensystem

**A19** Leite mit Hilfe der Regeln für die 4 Quantenzahlen ab, wie viele Elektronen sich in den s, p, d und f-Orbitalen befinden können beziehungsweise auf den ersten 4 Atomshalen. Vervollständige dazu Tabelle 4.

n	$l < n$	$ m  \leq l$	s	$\Sigma$ der Möglichkeiten
1	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	$1 \cdot 2 = 2$
2	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	$1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 8$
	1	-1, 0, 1		
3	0		$\pm \frac{1}{2}$	
	1			
	2			
4	0		$\pm \frac{1}{2}$	
	1			
	2			
	3			

Tab. 4: Möglichkeiten für die Quantenzahlen l und m in Abhängigkeit von n.

**A20** Im Internet kursiert folgender Witz (Quelle: failbook.failblog.org): „Some Helium floates into a bar. The bartender says, ‚Sorry, we don’t serve noble gases here.‘ The helium doesn’t react.“ Was ist der physikalische Hintergrund dieses Internetwitzes?

**A21** Wodurch unterscheiden sich die einzelnen Elemente des Universums ganz einfach gesagt? Wodurch wird ihre chemische Eigenschaft verursacht?

**A22** Im Heliumatom sind beide Elektronen auf gleichem Energieniveau eingebaut. Zum Abtrennen des ersten Elektrons sind 24 eV notwendig, wenn man auch das zweite abtrennen will jedoch 54 eV. Ist das nicht ein Widerspruch zur einleitenden Aussage?

**A23 a** Kohlenstoff hat die Ordnungszahl 6. Welche Elektronenkonfiguration hat er? Wie viele Valenzelektronen besitzt er daher?

**A23 b** Kohlenstoff hat 4 Valenzelektronen (siehe a), wodurch man zum Beispiel die chemische Verbindung Methan ( $\text{CH}_4$ ) erklären kann. Zwei der Valenzelektronen stammen jedoch vom 2s-Orbital, die zwei weiteren von den 2p-Orbitalen. Müssten daher die vier Wasserstoffatome nicht eigentlich unterschiedlich gebunden sein? Tatsächlich kann man aber feststellen, dass die vier Bindungen gleichartig und nicht unterscheidbar sind. Wie kann man das erklären?

**A24** Warum kann kein  $\text{He}_2$ -Molekül gebildet werden?



**Hilfe zu A1:** Wenn etwa 50.000 Teilchen um  $20^\circ$  abgelenkt werden, dann werden statistisch gesehen nur rund 50 Teilchen um  $120^\circ$  abgelenkt. Das Verhältnis beträgt also 1000:1. Daraus kann man schließen, dass sehr viele Teilchen durch die Goldfolie fliegen müssen, damit man auch sehr starke Ablenkungen messen kann.

**Hilfe zu A2 a:** Gold hat eine Massenzahl von etwa 197. Daher ergibt sich für den Durchmesser des Gold-Atomkerns  $d = 2r \approx 2,4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{A} \text{ m} \approx 1,4 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ .

**Hilfe zu A2 b:** Ein Mol Gold hat 197 g. Die Dichte  $\rho$  von Gold beträgt  $19,3 \text{ g/cm}^3$  oder  $19300 \text{ kg/m}^3$ . Aus  $\rho = \frac{m}{V}$  folgt  $V = \frac{m}{\rho}$ . Das Volumen von 1 Mol Gold beträgt daher  $0,197 \text{ kg}/(19300 \text{ kg/m}^3) \approx 10^{-5} \text{ m}^3$ . Das Volumen eines einzelnen Goldatoms beträgt daher  $10^{-5} \text{ m}^3/(6 \cdot 10^{23}) = 1,7 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$ . Die Seitenlänge des „Gold-Würfels“ und somit auch sein Durchmesser beträgt  $d = \sqrt[3]{1,7 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3} = 2,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

**Hilfe zu A2 c:** Das Verhältnis Atom zu Atomkern beträgt bei Gold  $2,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}/1,4 \cdot 10^{-14} \text{ m} \approx 18.400:1$ . Wenn der Kern 1 cm groß wäre, dann wäre das gesamte Goldatom 18.600 cm oder 186 m groß.

**Hilfe zu A3 a:** Die benötigte Zentripetalkraft für die Kreisbahn wird durch die Coulombkraft erzeugt. Daher kann man diese beiden Kräfte gleichsetzen und nach  $v$  auflösen:  

$$\frac{mv^2}{r} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k Q_1 Q_2}{mr}}$$
 Durch Einsetzen der bekannten Werte erhält man  $v = \sqrt{\frac{k Q_1 Q_2}{mr}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \text{ m}}{10^{-30} \cdot 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ s}}} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ . Das ist zwar absolut gesehen sehr hoch, beträgt aber doch weniger als 1 % der Lichtgeschwindigkeit.

**Hilfe zu A3 b:** Aus  $v = 2\pi f r$  folgt  $f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2,1 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}} \text{ s}^{-1} \approx 6,8 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ . Das liegt rund eine Größenordnung über der tatsächlichen Frequenz von Licht, ist aber reiner Zufall, weil ja die Lichtfrequenz nicht von der Kreisfrequenz des Elektrons abhängt, sondern ausschließlich von  $f = \Delta E/h$  beim Quantensprung.

**Hilfe zu A4:** Berechnen wir zunächst die kinetische Energie. Die Geschwindigkeit des Elektrons beträgt  $2,1 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ . Damit erhält man für die kinetische Energie des Elektrons  $E_k = \frac{mv^2}{2} = 2,2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ . Nun berechnen wir die Zentripetalbeschleunigung des Elektrons, wobei  $r$  dem Bohr'schen Atomradius entspricht:  $a = \frac{v^2}{r} =$

$= 8,3 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$ . Wenn man nun alle bekannten Werte in die Formel für die Strahlungsleistung einsetzt, erhält man  $P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = 5,5 \cdot 10^{-8} \text{ J/s}$ . Das Elektron würde daher in etwa  $t = E_{\text{kin}}/P = 48 \cdot 10^{-11} \text{ s}$  seine kinetische Energie vollkommen verloren haben. Tatsächlich ist die Zeitdauer länger, nämlich  $10^{-8}$  bis  $10^{-9}$  Sekunden.

**Hilfe zu A5:** Der Hausverstand sagt, dass  $\Delta x \leq x$  sein muss. Zum Beispiel ist die Angabe, in der runden Box befinden sich  $200 \pm 20$  Kugeln, sinnvoll. Die Angabe  $200 \pm 210$  Kugeln ist sinnlos, weil ja dann zwischen -10 und 410 Kugeln in der Box wären, und was soll man sich unter -10 Kugeln vorstellen? Ähnlich ist es mit Impuls und Impulsunschärfe. Die Impulsunschärfe kann nie größer werden als der eigentliche Wert. Daraus folgt aber, dass mit dem Wachsen der Unschärfe zwangsläufig auch der Impuls wachsen muss. Dafür gibt es aber leider keine Analogie mit Kaugummikugeln.

**Hilfe zu A6:** Wenn du die Gesamtenergie berechnest und differenzierst, erhältst du

$$E = \frac{h^2}{32m\pi^2 r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = r^{-2} \cdot \frac{h^2}{32m\pi^2} - r^{-1} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\frac{dE}{dr} = -2r^{-3} \cdot \frac{h^2}{32m\pi^2} - (-r^{-2}) \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{h^2}{16m\pi^2 r^3} = 0$$

Weil der Ausdruck 0 ergibt, kann man durch  $1/r^2$  kürzen und erhält  $\frac{dE}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} - \frac{h^2}{16m\pi^2 r} = 0$ . Daraus folgt weiter  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{h^2}{16m\pi^2 r}$  und  $r = \frac{h^2 \epsilon_0}{e^2 4m\pi} \approx 8,6 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ . (Anm.: Normalerweise wird der Bohr'sche Radius mit  $0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  angegeben und entspricht der Maximum der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons. Siehe dazu Abb. 6 zu A10!)

**Hilfe zu A7:** Der Radius des Wasserstoffatoms ergibt sich aus  $r = \frac{h^2 \epsilon_0}{e^2 4m\pi}$ . Somit ist  $r \sim h^2$ . Wenn  $h$  um den Faktor 10 größer oder kleiner wäre, dann wäre der Radius um den Faktor  $10^2 = 100$  größer oder kleiner. Dadurch würden sich das Volumen und somit auch die Dichte der Atome um den Faktor  $(10^2)^3 = 10^6$  verändern. Das Wirkungsquantum verleiht der Materie also nicht nur sein Volumen, seine Größe bestimmt auch empfindlich den gesamten Aufbau der Materie und somit auch des Universums.

**Hilfe zu A8:** Die Gesamtenergie ist immer konstant. Im klassischen Fall, etwa wenn eine Kugel in eine Mulde rollt, wird die potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt,

und wenn die Kugel zum Stillstand kommt, wurde die potenzielle Energie letztlich in Wärme umgewandelt. Im quantenmechanischen Fall sinkt die Gesamtmenge aus  $E_p$  und  $E_k$  ab, wenn sich das Elektron im Orbital quasi stabilisiert hat. Der Rest der Energie wird in Form von Strahlung (eines Photons) frei. Das nennt man das Rekombinationsleuchten. Um das Elektron näher an das Proton zu bekommen, müsste man das Orbital „quetschen“, und dazu ist Arbeit notwendig, die dann in der zusätzlichen Lokalisationsenergie stecken würde. In Summe bleibt aber auch hier die Energie immer konstant.

**Hilfe zu A9 a:** Darunter versteht man die potenzielle Energie eines einzigen Elektrons, wenn dieses im Spannungsfeld von 1 V verschoben wird. Seine Energie beträgt dann  $E_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV}$ .

**Hilfe zu A9 b:** Man kann ohne Rechnung überlegen. 1 eV ist die Energie, die nötig ist, um 1 Elektron im Spannungsfeld von 1 V zu verschieben. Wenn für die Ablösung des Elektrons 13,6 eV notwendig sind, muss das Spannungsfeld auch 13,6 V betragen.

Oder rechnerisch: Zum Ablösen des Elektrons ist eine Energie von 13,6 eV notwendig. Aus  $E_p = Q \cdot U$  folgt daher  $U = E_p / Q = 13,6 \text{ eV} / 1 \text{ e} = 13,6 \text{ V}$ .

**Hilfe zu A10:** Entlang einer bestimmten Richtung ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron genau im Kern anzutreffen, tatsächlich am größten. Der Kern hat aber ein extrem kleines Volumen. Dadurch wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $P = |\Psi|^2 \cdot \Delta V$  ebenfalls extrem klein. Abb. 6a sagt daher paradoxer Weise nichts darüber aus, wo man ein Elektron bei einem gegebenen Experiment tatsächlich am ehesten finden wird. Sinnvoller ist eher die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron irgendwo im Abstand  $r$  zu finden, genauer gesagt in der Kugelschale zwischen  $r$  und  $r + dr$ ? Das ist in Abb. 6 b dargestellt. Man erhält dabei eine Funktion, die bei einem bestimmten  $r$  ein Maximum hat und im Atomkern Null ist - also ein komplett verschiedenes Ergebnis. Der Ort des Maximums entspricht genau dem Bohr'schen Atomradius. Wenn man im ganzen Raum des Orbitals misst, wo sich das Elektron befindet, und nicht nur in eine Richtung, dann wird man es am Öftesten im Bereich des Bohr'schen Atomradius antreffen, und niemals exakt in der Mitte. Abb. 6b gibt also die Verhältnisse besser wieder.

**Hilfe zu A11:** Aus  $P = \frac{4r^2}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}}$  folgt

$$\frac{dP}{dr} = \frac{2 \cdot 4r}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} + \frac{4r^2}{a_0^3} \cdot \left(-\frac{2}{a_0}\right) \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} = 0$$

$$\frac{8r}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} - \frac{8r^2}{a_0^4} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} = 0$$

$$\frac{8r}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} = \frac{8r^2}{a_0^4} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

$$1 = \frac{r}{a_0} \Leftrightarrow r = a_0$$

**Hilfe zu A12 a:** Durch Einsetzen in die Gleichung  $P(\Delta) =$

$$\frac{4r^2}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot \Delta r \text{ mit } a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m} \text{ erhältst du folgende}$$

Werte:

Abstand (Intervall $\pm a_0$ )	$P(\Delta r)$
$a_0$ ( $0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ )	$0,54 = 5,4 \cdot 10^{-1}$
$5a_0$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
$10a_0$	$0,8 \cdot 10^{-6}$
$20a_0$	$6,8 \cdot 10^{-15}$
$100a_0$	$5,6 \cdot 10^{-83}$
$300a_0$	$9,7 \cdot 10^{-256}$

Tab. 2 zu A12 a

Du siehst, dass die Werte außerhalb von  $a_0$  extrem abfallen. Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron bei einer Messung bei  $5a_0$  zu finden, beträgt z. B. nur mehr rund ein Hundertstel im Vergleich zu  $a_0$ , bei  $20a_0$  ist es gar nur mehr ein Zehnbillionstel, bei  $300 a_0$  praktisch null.

**Hilfe zu A12 b:** Die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte ist durch  $P = \frac{4r^2}{a_0^3} \cdot e^{-\frac{2r}{a_0}}$  gegeben. Der erste Term wächst mit  $r^2$  an und kann daher für  $r \rightarrow \infty$  niemals auf null absinken. Auch der zweite Term kann niemals auf null absinken, er nähert sich nur asymptotisch der x-Achse an. Die absurde Folge daraus ist die, dass man rein theoretisch das Elektron bei einer Messung auch im Abstand von 1 m, 1 km oder beim Mond finden könnte. Die Wahrscheinlichkeit dazu ist aber so absurd winzig, dass das niemals passieren wird.

**Hilfe zu A13:** Wasserstoff hat die Molmasse 1. Das bedeutet, dass 1 Mol Wasserstoff eine Masse von 1 g besitzt. Daher befinden sich in dem Liter ( $= 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ ) 70,6 Mol Wasserstoff oder  $70,6 \cdot 10^{23}$  Atome  $= 4,23 \cdot 10^{25}$  Atome. Das Volumen eines Wasserstoffatoms beträgt daher  $10^{-3} \text{ m}^3 / (4,23 \cdot 10^{25}) = 2,36 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$ . Die Seitenlänge eines

„Wasserstoff-Würfels“ und somit auch sein Durchmesser beträgt  $d = \sqrt[3]{2,36 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3} = 2,87 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Der Radius liegt daher bei  $1,43 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ . Das entspricht über den Daumen dem dreifachen Bohr'schen Radius, trifft also zumindest die Größenordnung recht gut.

**Hilfe zu A14:** Es gibt keinen „wirklichen“ Atomradius. Das Orbital dünnt sich salopp gesagt nach außen hin immer weiter aus, endet aber so gesehen niemals. Ein Atom hat also keine Haut, und es ist Geschmackssache, wo man den Radius definiert. Beim Wasserstoffatom gibt man meistens den Bohr'schen Radius an, bei dem gleichzeitig auch die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte am größten ist.

**Hilfe zu A15:** Meistens wird der Teilchenspin mit der Analogie eines kleinen rotierenden Balls erklärt. Du musst dir aber im Klaren sein, dass das nur eine bildliche Hilfskonstruktion ist. Der Ort eines Quants ist generell „unscharf“, und diese können daher auch keine kleinen rotierenden Bälle sein. Man kann zwar Quanten einen Drehimpuls zuordnen, aber so, wie es das Bild des rotierenden Teilchens suggeriert, ist es auf der anderen Seite ganz sicher nicht. Leider gibt es kein besseres Bild davon.

**Hilfe zu A16:** Gäbe es das Pauli-Verbot nicht, dann würden sich alle Elektronen in der untersten Schale befinden. Es gäbe kein Periodensystem: Die Elemente würden ihre typischen chemischen Eigenschaften verlieren. Alle Atome könnten sich dann mit allen Atomen verbinden, und die Größe von Molekülen wäre nach oben hin nicht begrenzt. Leben in der uns gewohnten Form könnte sich unter diesen Bedingungen nicht entwickeln. Außerdem würden ohne Pauli-Verbot die Elemente mit zunehmender Ordnungszahl kleiner werden, weil die Elektronen durch die Erhöhung der Protonenzahl näher an den Kern herangezogen werden. Uran-Atome wären somit am kleinsten. Das Pauli-Verbot verleiht also gemeinsam mit der Unschärferelation der Materie ihr Volumen!

**Hilfe zu A17:** In diesem Fall könnten sich nicht beliebig viele Photonen an einer Stelle aufhalten. Licht könnte daher nicht beliebig hell sein. Auch ein Laser wäre unmöglich: Das wichtigste Merkmal eines Lasers ist ja, dass alle Photonen exakt dieselbe Energie (also dieselbe Wellenlänge bzw. dieselbe Farbe) haben. Auch einfarbiges Licht wäre nicht möglich, eben weil keine zwei Photonen dieselbe Energie, also dieselbe Farbe aufweisen dürften. Sich kreuzende Lichtstrahlen würden quasi voneinander abprallen. Dann wäre

man der Möglichkeit ein Lichtschwert zu bauen ein Stückchen näher gerückt.

**Hilfe zu A18:** Immer mit dem „Eröffnen“ eines weiteren s-Orbitals steigt der Atomradius sprunghaft an. Weil Atome mit höherer Ordnungszahl mehr Elektronen in den Schalen haben, müssen diese daher auch immer größer werden, und daher werden die „Neues-s-Orbital-Zacken“ immer höher. Warum aber sinkt zwischen den Zacken die Atomgröße wiederum ab? Weil mit Zunahme der Ordnungszahl auch die Anzahl der Ladungen im Kern steigt. Dadurch werden die Elektronen in der Hülle stärker angezogen, und die Orbitale werden kleiner.

**Hilfe zu A19:** Im s-Orbital ( $l = 0$ ) können sich 2 Elektronen befinden (mit  $s = \pm \frac{1}{2}$ ). Im p-Orbital ( $l = 1$ ) gibt es für  $m$  3 Möglichkeiten (siehe Tab. 4), und daher können sich dort wegen  $s = \pm \frac{1}{2}$  in Summe 6 Elektronen befinden. Im d-Orbital ( $l = 2$ ) gibt es für  $m$  5 Möglichkeiten (in Summe 10 Elektronen). Im f-Orbital ( $l = 3$ ) gibt es für  $m$  7 Möglichkeiten (in Summe 14 Elektronen).

Um auf die Anzahl der möglichen Elektronen in den Atomschalen zu kommen, muss man die Anzahl der Elektronen in den einzelnen Orbitalen addieren.

n	$l < n$	$ m  \leq l$	s	$\Sigma$ der Möglichkeiten
1	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	$1 \cdot 2 = 2$
2	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	$1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 8$
	1	-1, 0, 1		
3	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	$1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 18$
	1	-1, 0, 1		
	2	-2, -1, 0, 1, 2		
4	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	$1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 32$
	1	-1, 0, 1		
	2	-2, -1, 0, 1, 2		
	3	-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3		

Tab. 4: Möglichkeiten für die Quantenzahlen  $l$  und  $m$  in Abhängigkeit von  $n$  und die daraus resultierende Anzahl von Elektronen in den Atomschalen.

**Hilfe zu A20:** Edelgase sind auf Grund ihrer vollen äußeren Schale (2 oder 8 Valenzelektronen) chemisch träge und reagieren daher nicht. „The helium doesn't react.“ ist daher doppeldeutig.

**Hilfe zu A21:** Die Elemente dieses Universums unterscheiden sich durch die Anzahl der Protonen. Die Zahl der Elektronen und Protonen ist pro Element immer gleich groß – Atome sind ja nach außen elektrisch neutral. Für die chemischen Eigenschaften sind nur die Elektronen bedeutend.

Will man also die Eigenschaften eines Elements wissen, muss man Anzahl und Energien seiner äußeren Elektronen kennen.

**Hilfe zu A22:** Durch die Abtrennung eines Elektrons entfällt die Abstoßung zwischen den beiden Elektronen und das verbleibende Elektron ist stärker gebunden.

**Hilfe zu A23 a:**  $1s^2 2s^2 2p^2$  oder  $[\text{He}] 2s^2 2p^2$ . Valenzfähig sind alle s- und p-Elektronen der äußersten Schale und Elektronen von nicht vollbesetzten d- und f-Orbitalen. Der Kohlenstoff hat daher 4 Valenzelektronen.

**Hilfe zu A23 b:** Dies kann man durch  $sp^3$ -Hybridisierung erklären: Das doppelt besetzte, kugelförmige 2s-Orbital wird mit den hantelförmigen 2p-Orbitalen (2 einfach besetzt, eins unbesetzt) zu vier gleichen, keulenförmigen  $sp^3$ -Hybridorbitalen kombiniert, die mit je einem Elektron besetzt sind (siehe Abb. 8). Diese richten sich tetraedrisch im Raum aus und bilden mit den 1s-Elektronen des Wasserstoffs gleichartige Atombindungen. Das so entstandene Modell entspricht den beobachteten Eigenschaften des Methans. Das Konzept der Hybridisierung wurde um 1930 von Linus Pauling entwickelt.

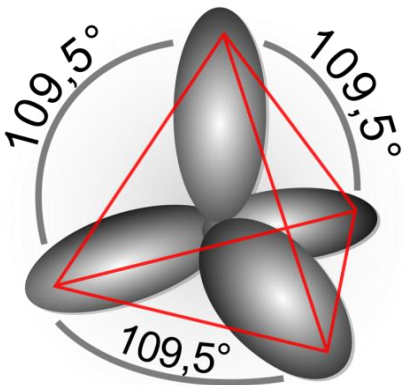


Abb. 8: Vier  $sp^3$ -Orbitale richten sich tetraedrisch in gleichem Winkel zueinander aus (Grafik: Sven; Quelle: Wikipedia).

**Hilfe zu A24:** Weil der 1s-Zustand mit zwei Elektronen besetzt ist. Keines dieser Elektronen kann mit einem Elektron eines anderen Atoms ein gemeinsames Orbital bilden, weil dieser Zustand dann mit drei Elektronen besetzt wäre. Das widerspricht dem Pauli-Verbot.