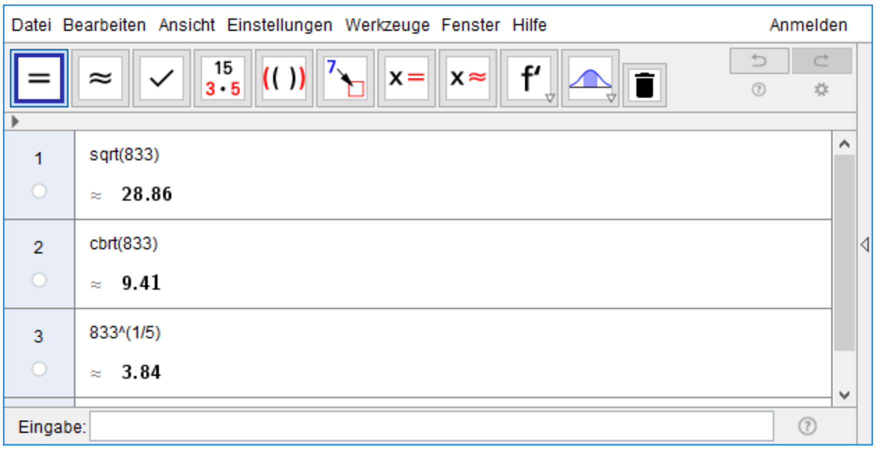
# Mathematik verstehen 6. GeoGebra, Technologietraining Lösungen

**G 1.02**

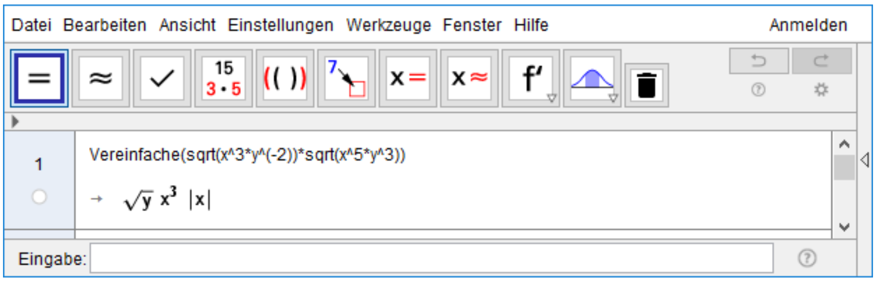



Die fünfte Wurzel ergibt
die kleinste Zahl.

**G 1.04** Ja; $x = 6$

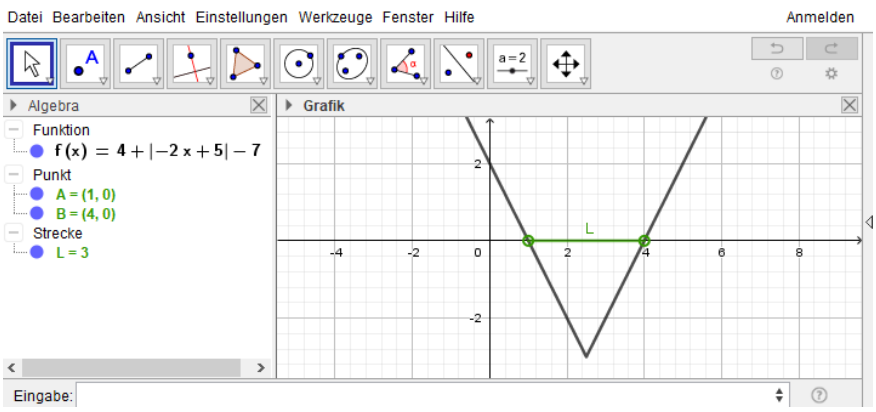
**G 1.05** Ein solches $x \in \mathbb{R}$ kann es nicht geben, da sonst $\sqrt{x+2} = -2 < 0$ gelten müsste.

**G 1.07**



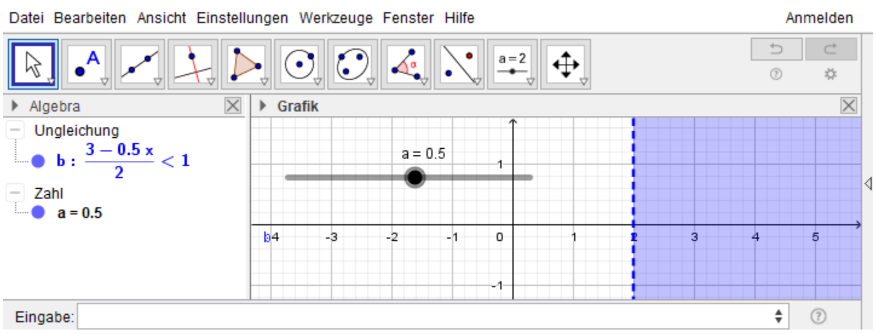

$\sqrt{x^3y^{-2}} \cdot \sqrt{x^5y^3} = \sqrt{x^8y} = x^4\sqrt{y}$

**G 2.04**

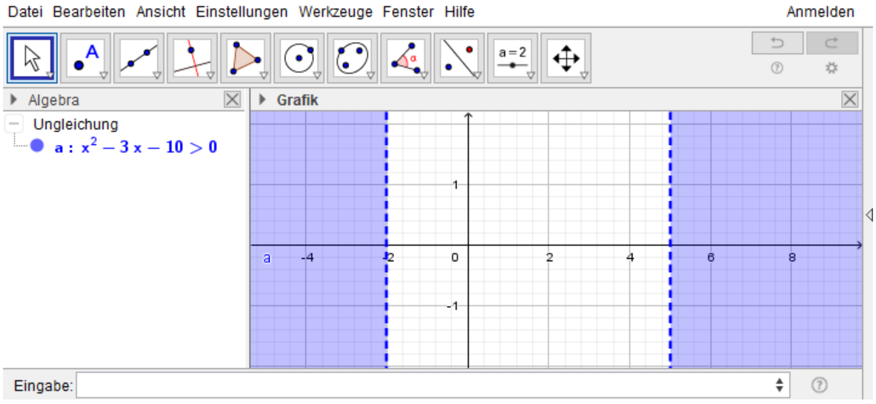



$L = (1; 4)$

**G 2.05**



**G 2.07**




$L = (-\infty; -2) \cup (5; \infty)$

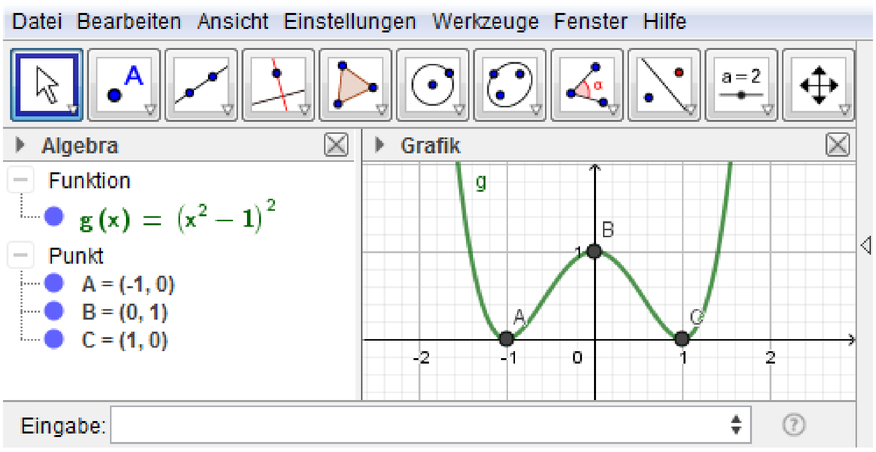
**G 2.08** Analog zu **G 2.06** bzw. **G 2.07**

**G 3.02** Völlig analog zu **G 3.01**.

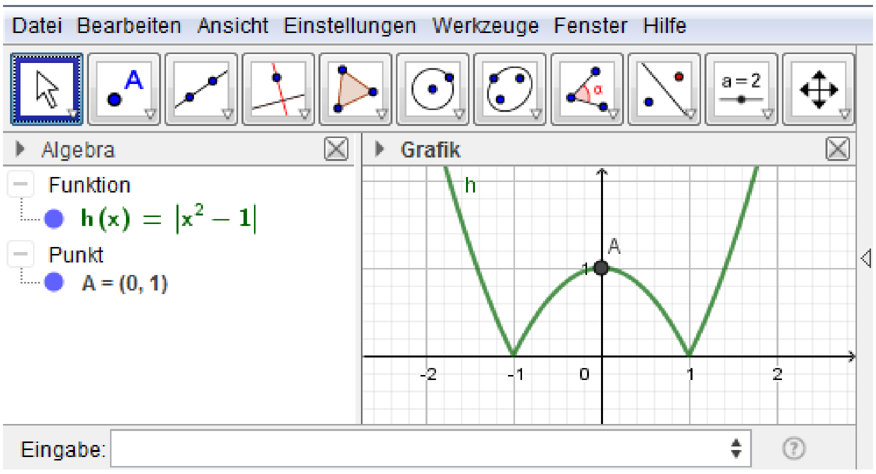
**G 3.03** h ist im Intervall $[-1; 1]$ monoton fallend und im Intervall $[1; 2]$ monoton steigend.

**G 3.04** Zur Konstruktion der roten Strecke, die das Intervall $[2; 6]$ darstellt, und der beiden strichlierten Hilfslinien platziere Hilfspunkte auf die Achsen, zeichne die benötigten Verbindungsstrecken (und die Mittelpunkte der strichlierten Stecken als weitere Hilfspunkte) und mache alle Hilfspunkte unsichtbar! Die Anzeige der Koordinaten wird mit dem Werkzeug „Text" realisiert. Unter „Eigenschaften" stelle als Anfangspunkt den jeweiligen Halbierungspunkt ein! Dann wandern die Anzeigen mit, wenn der Punkt A entlang des Graphen bewegt wird.

**G 3.06**



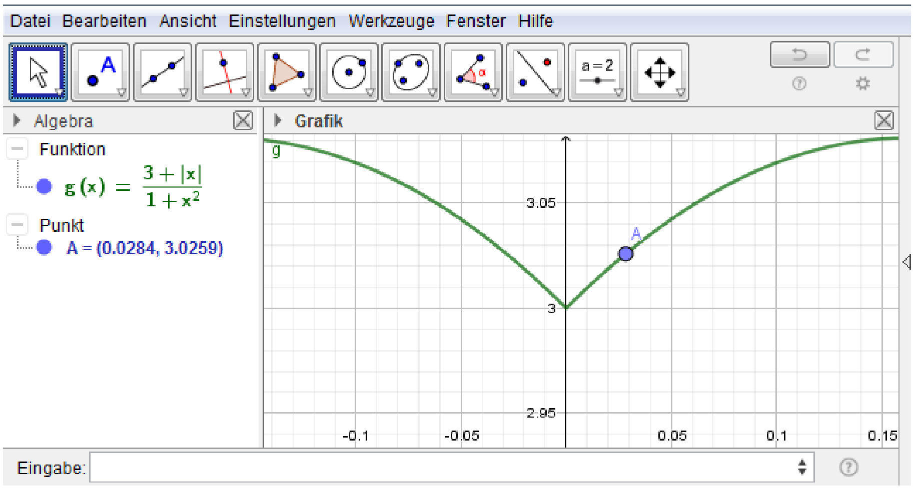

**G 3.07**




GeoGebra zeigt die beiden lokalen Minimumstellen nicht an.

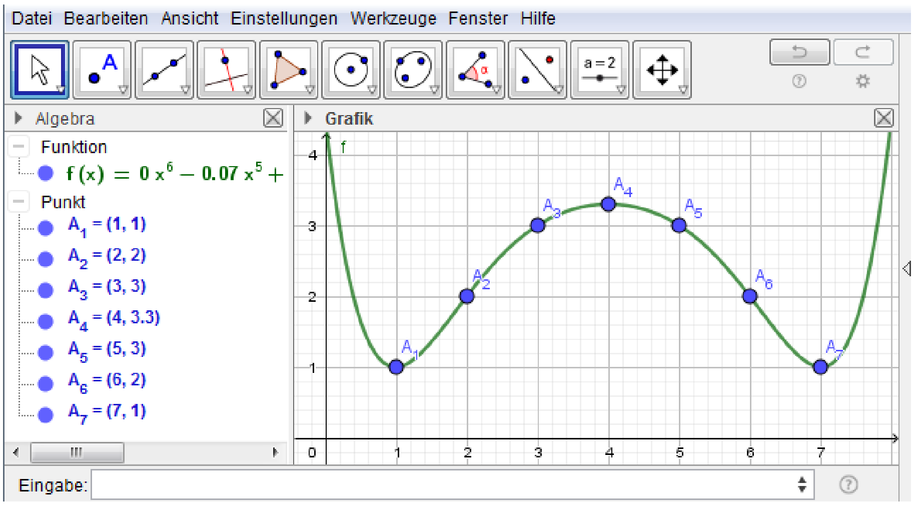
**G 3.08** Die Funktion  besitzt genau dann lokale Extremstellen, wenn $a > 0$ ist. (Ist $a = 0$, so besitzt sie eine Sattelstelle.)

**G 3.09**




Die einzige lokale Extremstelle ist die lokale Minimumstelle 0.
Der zugehörige Tiefpunkt ist $(0|3)$.

**G 3.11**

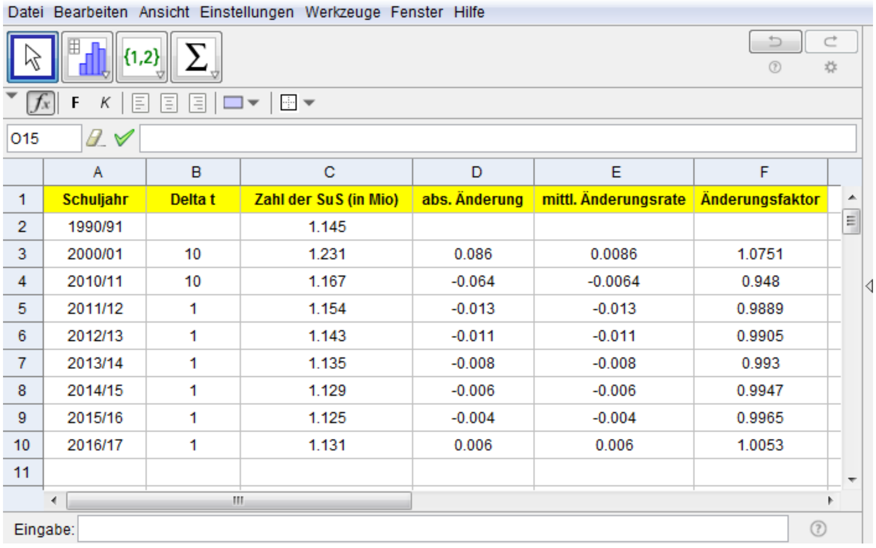



*Tipp: Um die zweite Koordinate von $A_4$ bei gleichbleibender erster Koordinate zu ändern, klicke auf den Punkt $A_4$ und benutze die Pfeiltasten. Falls der Punkt zu große Sprünge macht, öffne seinen Eigenschaftendialog, wähle „Algebra“ und trage eine kleinere Schrittweite ein!*

**G 3.13** Ist n eine positive ganze Zahl, so ist $x^n$ für alle reellen $x$ definiert. Dann „blitzt“ ein Teil des Graphen links von der 2. Achse auf. Für alle anderen Werte von $n$, die man mit dem Schieberegler einstellen kann, ist $x^n$ nur für $x > 0$ (falls $n < 1$) oder $x \geq 0$ (falls $n > 1$) definiert.

**G 3.14** Eine Änderung von $a_0$ bewirkt eine Verschiebung des Graphen parallel zur 2. Achse. Eine Änderung des Vorzeichens von $a_3$ ändert das Verhalten für große $|x|$, wodurch man den gleichen Eindruck bekommt, wie wenn ein Mensch mit beiden Händen winkt, indem er immer eine Hand nach oben und eine nach unten hält und dies ständig wechselt.

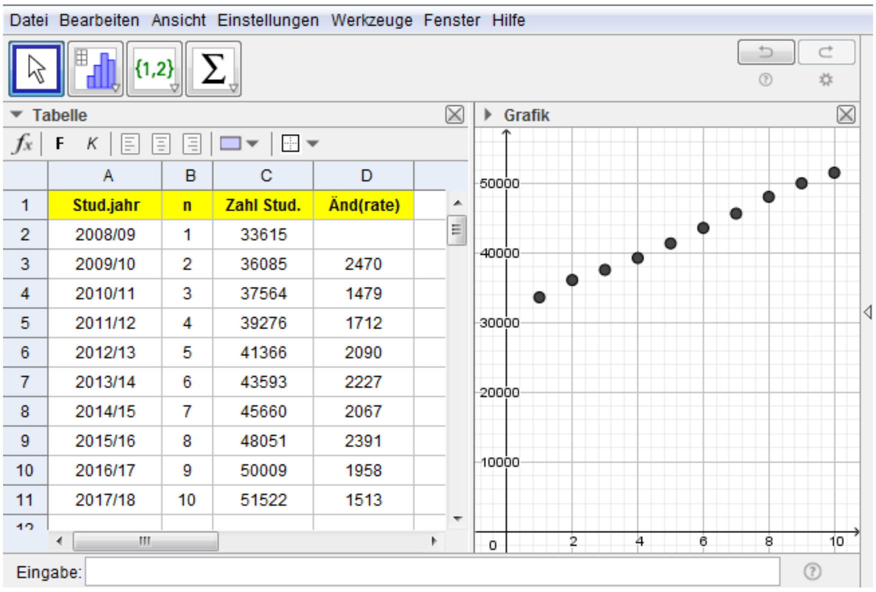
**G 3.16**



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Schuljahr | Delta t | Zahl der SuS (in Mio) | abs. Änderung | mittl. Änderungsrate | Änderungsfaktor |
| 2 | 1990/91 | | 1.145 | | | |
| 3 | 2000/01 | 10 | 1.231 | 0.086 | 0.0086 | 1.0751 |
| 4 | 2010/11 | 10 | 1.167 | -0.064 | -0.0064 | 0.948 |
| 5 | 2011/12 | 1 | 1.154 | -0.013 | -0.013 | 0.9889 |
| 6 | 2012/13 | 1 | 1.143 | -0.011 | -0.011 | 0.9905 |
| 7 | 2013/14 | 1 | 1.135 | -0.008 | -0.008 | 0.993 |
| 8 | 2014/15 | 1 | 1.129 | -0.006 | -0.006 | 0.9947 |
| 9 | 2015/16 | 1 | 1.125 | -0.004 | -0.004 | 0.9965 |
| 10 | 2016/17 | 1 | 1.131 | 0.006 | 0.006 | 1.0053 |
| 11 | | | | | | |

Die einzige zum Vergleich geeignete Kennzahl ist die mittlere Änderungsrate (Änderung der SchülerInnen-Zahl pro Jahr). Die anderen beiden berücksichtigen nicht, dass die Zeitintervalle zwischen den angegebenen Schuljahren (zweite Spalte) unterschiedlich groß sind.

**G 3.17**




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Stud.jahr | n | Zahl Stud. | Änd(rate) |
| 2 | 2008/09 | 1 | 33615 | |
| 3 | 2009/10 | 2 | 36085 | 2470 |
| 4 | 2010/11 | 3 | 37564 | 1479 |
| 5 | 2011/12 | 4 | 39276 | 1712 |
| 6 | 2012/13 | 5 | 41366 | 2090 |
| 7 | 2013/14 | 6 | 43593 | 2227 |
| 8 | 2014/15 | 7 | 45660 | 2067 |
| 9 | 2015/16 | 8 | 48051 | 2391 |
| 10 | 2016/17 | 9 | 50009 | 1958 |
| 11 | 2017/18 | 10 | 51522 | 1513 |

Sinnvoll sind die absolute Änderung und die mittlere Änderungsrate – sie sind numerisch gleich (in Spalte D), da nur aufeinanderfolgende Studienjahre angegeben sind. Die Zahlen sind mal größer, mal kleiner, ohne einheitlichen Trend. Das deutet daraufhin, dass die jährliche Zunahme der Studierendenzahlen leicht schwankt, aber näherungsweise konstant ist, d.h. dass die Entwicklung der Studierendenzahlen näherungsweise linear verläuft.
In der Spalte B sind die Jahre nummeriert. Werden aus den Daten in den Spalten B und C Punkte in der Grafikansicht erzeugt, so erkennt man ein einigermaßen lineares Wachstum der Studierendenzahlen. (Damit sind indirekt auch die absoluten Änderungen der Studierendenzahlen visualisiert.)

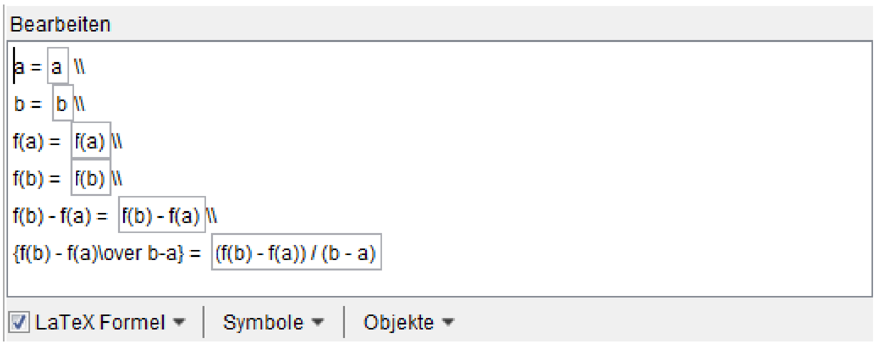
**G 3.19** $-a+b-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-(a-b)\frac{a\,b-1}{a\,b}$ , $\frac{a\,b-1}{a\,b}$ wird nicht verändert, $\frac{b+\frac{1}{b}}{a+\frac{1}{a}}=(b^2+1)\frac{a}{(a^2+1)b}$ .

**G 3.20** $a+b$

**G 3.21** $3a^2+2a+1$

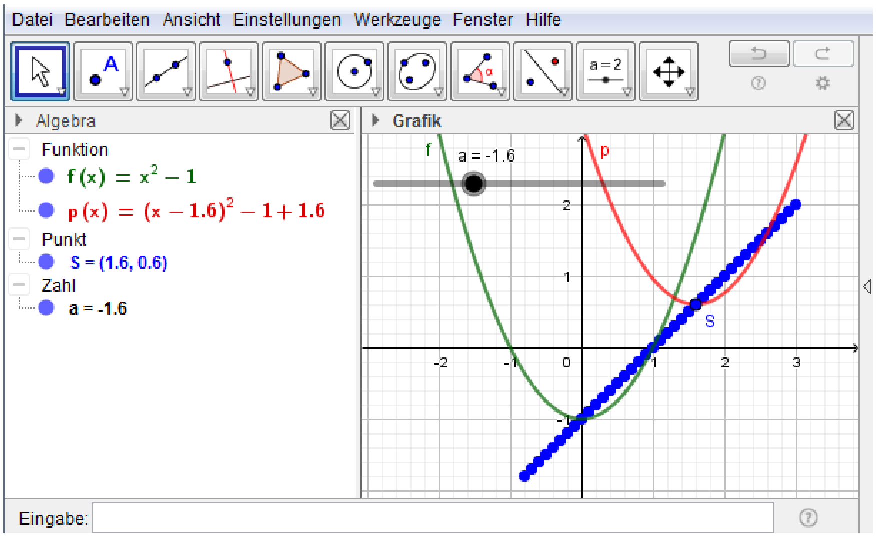
**G 3.22** $g(a)=3a^2+6a+4$ , $g(0)=4$, $g(1)=13$ , $g(2)=28$

**G 3.24** Die LaTeX-Eingabe sieht so aus:




**G 3.26** Der Graph von $q$ geht aus jenem von $f$ durch eine Stauchung/Streckung parallel zur ersten Achse hervor.

**G 3.27**

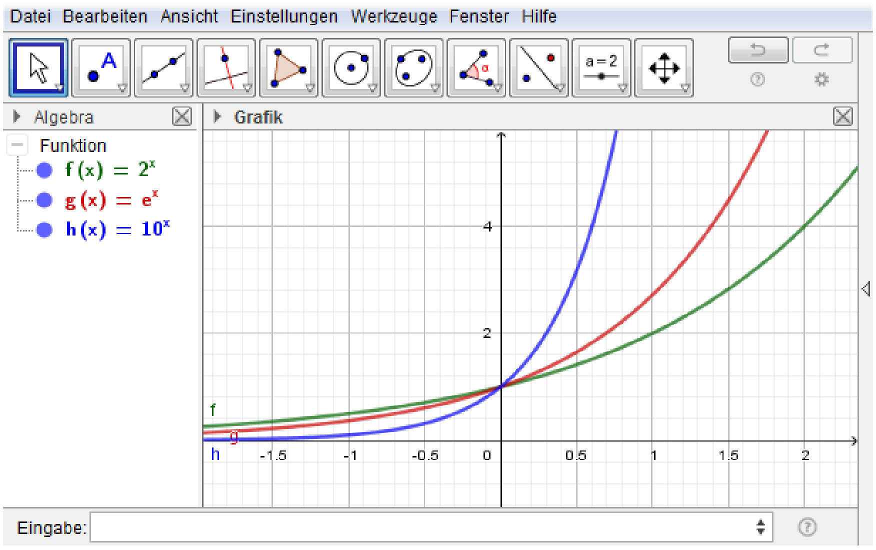



Hier ist eine Korrektur angebracht: Die letzte Version von GeoGebra erkennt p nicht als Kegelschnitt. Verwende daher statt „Scheitel(p)“ den Befehl „Extremum(p)“!
Der Scheitelpunkt bewegt sich auf der Geraden $y = x - 1$.

**G 3.28** $f$ ist genau dann eine gerade Funktion, wenn $a = 0$ ist.

**G 3.29** $f$ ist genau dann eine ungerade Funktion, wenn $a = 0$ ist.

**G 4.02**



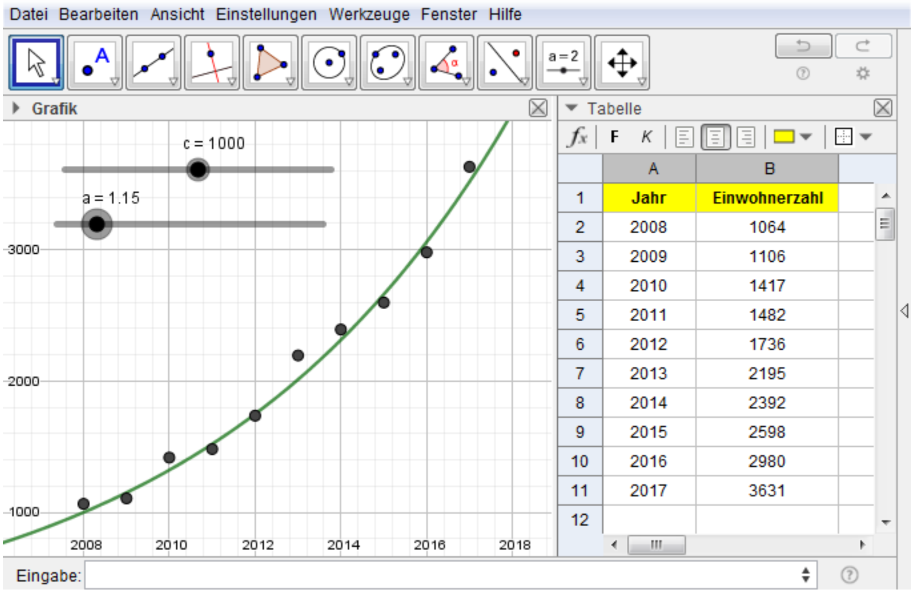

Die Unterschiede im Verhalten ergeben sich daraus, dass $0 < 2 < e < 10$ gilt.

**G 4.03** Die beiden Funktionen sind identisch.

**G 4.04** $c$ ist der Funktionswert an der Stelle 0, a ist die Basis der Exponentialfunktion $a^x$.
Wird nur die Basis $a$ verändert, so bleibt trotzdem der Funktionswert an der Stelle 0 unverändert.

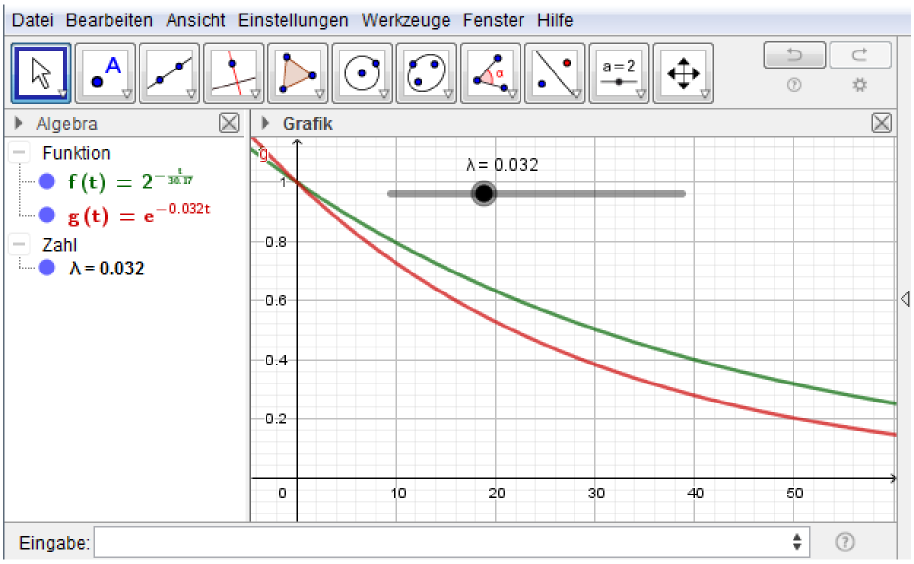
**G 4.05** $c$ ist der Funktionswert an der Stelle 0. $\lambda$ wird (falls positiv) als Wachstumsrate bezeichnet. Ist $\lambda < 0$, so heißt $|\lambda|$ Zerfallsrate.

**G 4.07**




Die Bevölkerungsentwicklung wird einigermaßen gut beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^{t-2008}$ und den Werten $a = 1.15, c = 1000$.

**G 4.08**



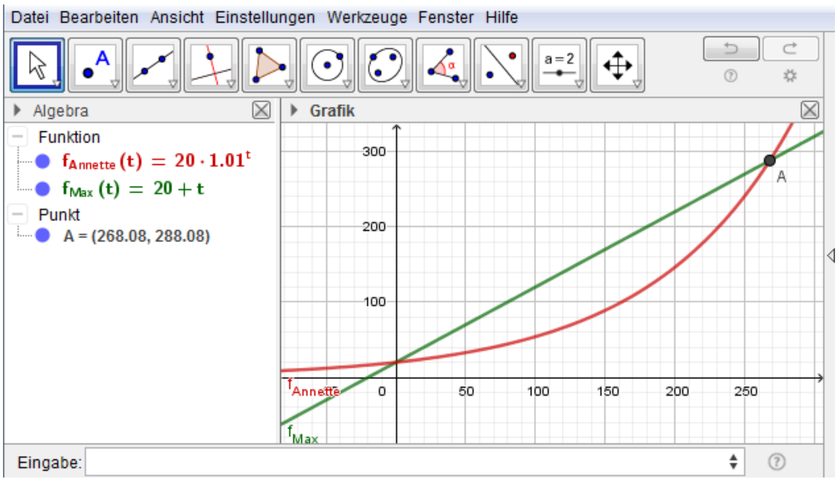

**G 4.10** Exakt: $x = -1$ und $x = 1 + \frac{ln(3)}{ln(2)}$. Näherungsweise: $x = -1$ und $x \approx 2.58496$.

**G 4.11** Die Halbwertszeit beträgt, auf 5 signifikante Stellen gerundet, $0.33128$ Sekunden.

**G 4.12** Nach $\frac{\ln(2)}{\ln(1.01)} \approx 69.66$ Jahren, d.h. nach knapp 70 Jahren.

**G 4.13** GeoGebra versucht, das Polynom $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{1000}$ auszumultiplizieren!
Um das Problem umzuformulieren, wird auf beiden Seiten der Logarithmus zur Basis 10 angewandt. Man erhält die (leicht lösbare) Gleichung $1000\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)=8$.
Die Lösung ist $p \;=\; 100(10^{1/125}-1) \;\approx\; 1.8591$.

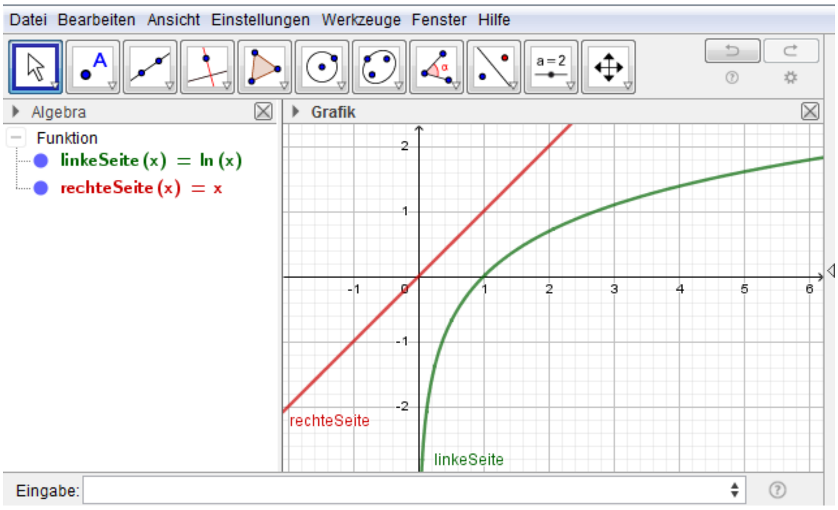
**G 4.14**



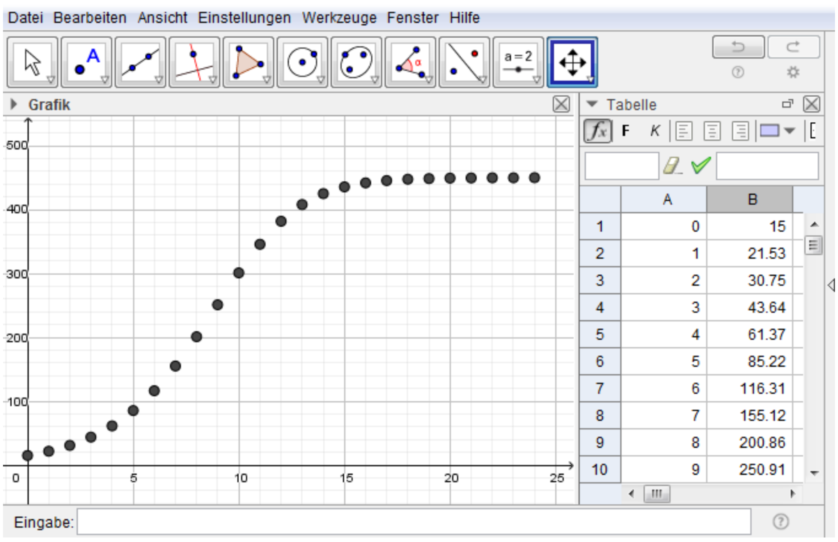

Annette muss 268 Wochen (mehr als 5 Jahre!) warten, bis sie mehr Taschengeld bekommt als Max.

**G 4.15** Mit $2\,ln(x) = ln(x^2)$ kann die Gleichung in eine quadratische Gleichung umgeformt werden.
Die Lösungen sind $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (also $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$).

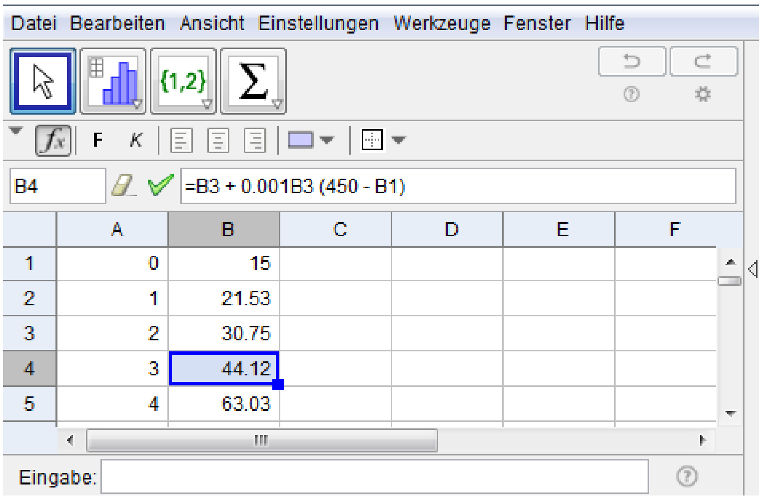
**G 4.16**



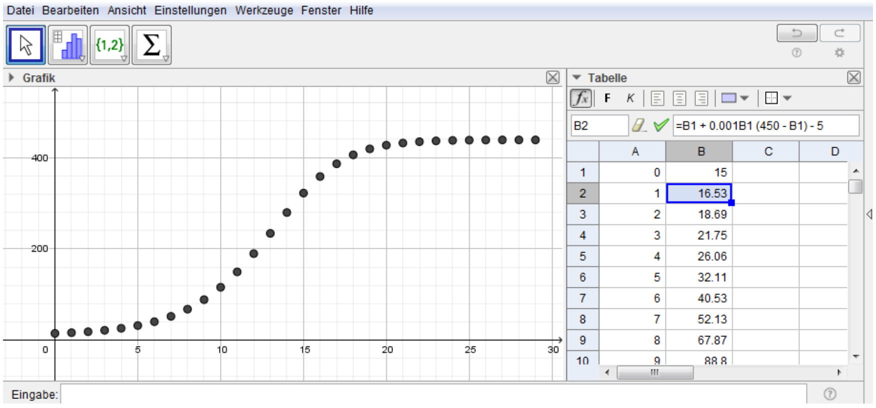

**G 4.18**



**G 4.19**




**G 4.20**




Die Populationsgröße nähert sich nicht mehr dem Wert $450$, sondern einer Lösung $M$ der Gleichung $M = M + 0{,}001\, M\,(450 - M) - 5$. Ihre Lösungen sind $M_1 \approx 11.4$ und $M_2 \approx 438{,}6$. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass $M_1$ eine instabile Lösung ist.
Sie wird nur dann angenommen, wenn der Anfangswert genau $M_1$ ist.

**G 5.02** Die kleinste Periode der Tangensfunktion ist $\pi$.

**G 5.03** Die kleinste Periode der angegebenen Funktion ist $\frac{2\pi}{3}$.

**G 5.04** Die kleinste Periode der angegebenen Funktion ist $\pi$.

**G 5.05** Die kleinste Periode der angegebenen Funktion ist $\pi$.

**G 5.06** Die angegebene Funktion ist nicht periodisch.

**G 5.08** $\sin^2(x)\cos(x) = \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(3x)$

**G 5.09** $\sin(u + 2v) = \sin(u)(2\cos^2(v) - 1) + \cos(u) \cdot 2\cos(v)\sin(v)$

**G 5.10** Mit „TrigErweitere“ und „Faktorisiere“ ergibt sich $\tan(x + y) = \frac{\cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}$.

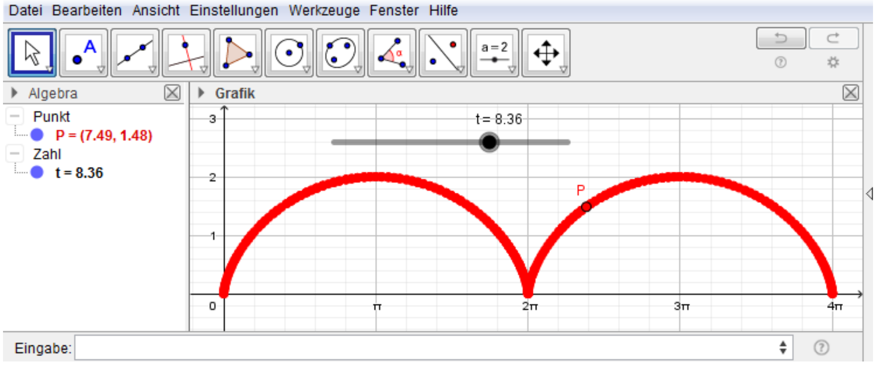
Ersetzt man $sin(x)$ durch $cos(x) \cdot tan(x)$ und $sin(y)$ durch $cos(y) \cdot tan(y)$,

so erhält man $\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$.

**G 5.12** Gehe wie beschrieben vor!

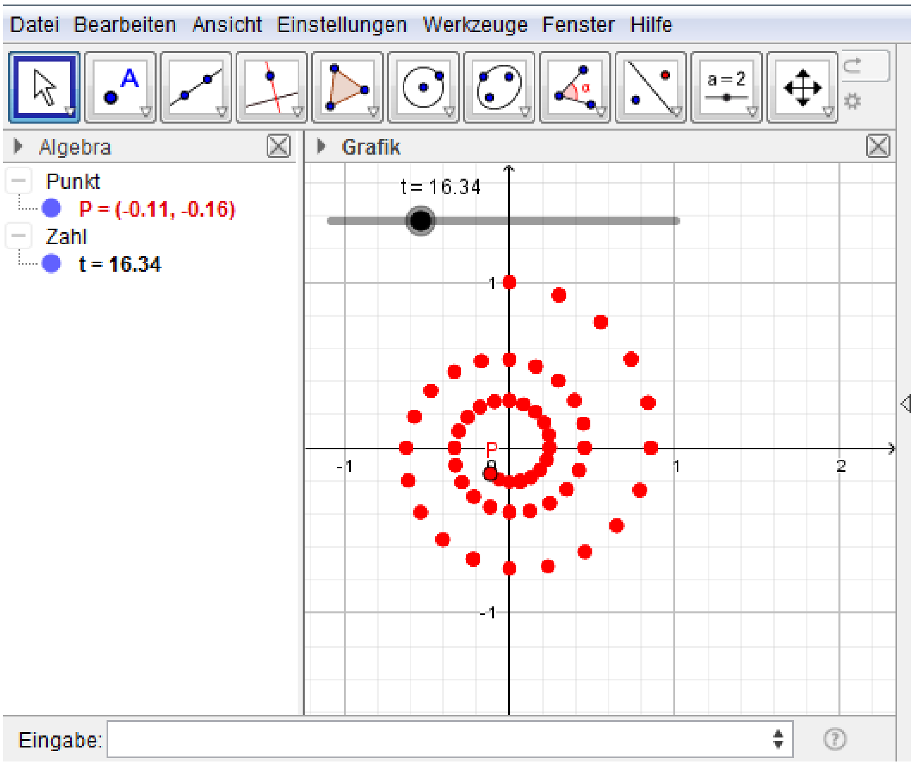
**G 5.13** Der Punkt bewegt sich auf einer Ellipse mit Halbachsen $a = 2$ und $b = 1$.

**G 5.14**



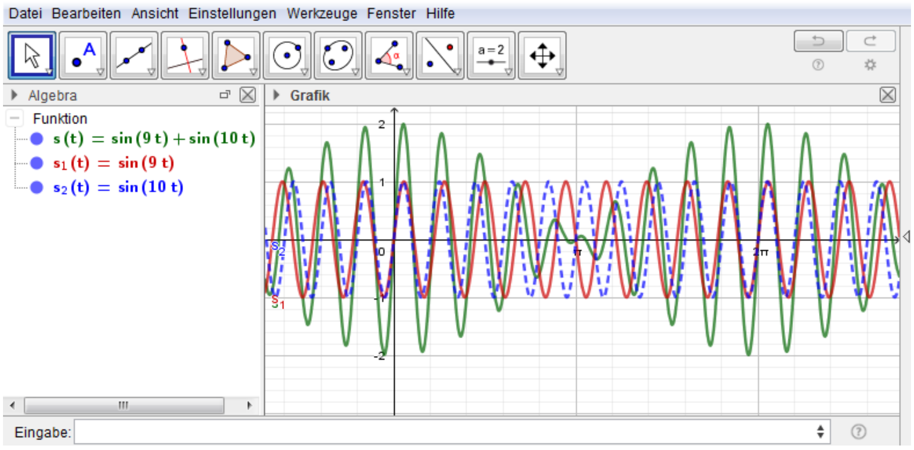

Die Kreisbewegung $P_1(t) = (-sin(t) \mid 1 - cos(t))$ wird der linearen Bewegung $P_2(t) = (t \mid 0)$ überlagert. Beim Radfahren macht ein auf einem Reifen fixierter Punkt eine solche Bewegung.

**G 5.15**



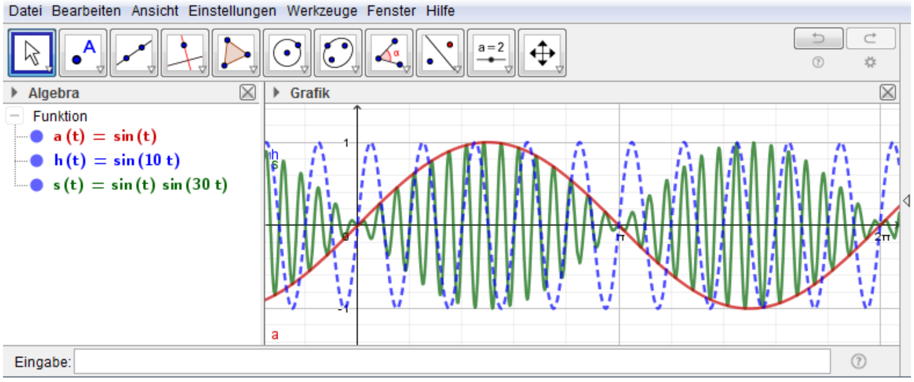

Der Punkt bewegt sich auf einer Spirale. Sein Abstand vom Ursprung ist $exp(-0.1t)$ und wird daher beliebig klein, der Punkt strebt gegen den Ursprung.

**G 5.17**



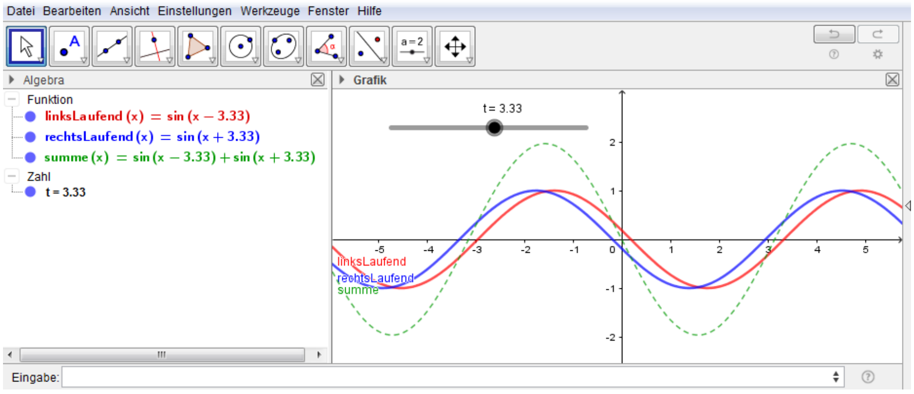
Für kleine t sind $s_1(t) = sin(9t)$ und $s_2(t) = sin(10t)$ näherungsweise in Phase und verstärken einander. Mit wachsendem t kommen sie außer Tritt, und nahe $t = \pi$ sind sie in Gegenphase und löschen einander fast aus. Nahe $t = 2\pi$ verstärken sie einander wieder. Dieses Phänomen kommt zustande, wenn zwei Töne mit leicht unterschiedlichen Frequenzen gleichzeitig zu hören sind. Man hört dann einen Ton mit an- und abschwellender Lautstärke.

**G 5.18**




$a(t) = sin(t)$ stellt eine niederfrequente Schwingung dar, $h(t) = sin(30t)$ eine hochfrequente. Das Produkt verhält sich wie eine hochfrequente Schwingung, deren Amplitude a sich aber langsam mit der Zeit ändert. In Anwendungen ist $h$ gegeben (das entspricht etwa der Frequenz des Radiosenders, den man hören will), und $a$ stellt die Information dar, die übertragen wird (Sprache, Musik).

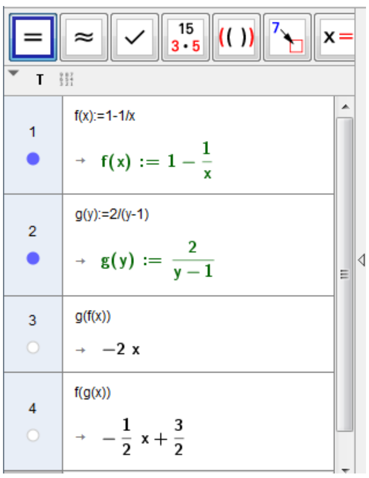
**G 5.19**




Wird der Schieberegler für t im Bereich von 0 bis $2\pi$ gewählt, so ergibt sich eine schöne Endlos-Animation.

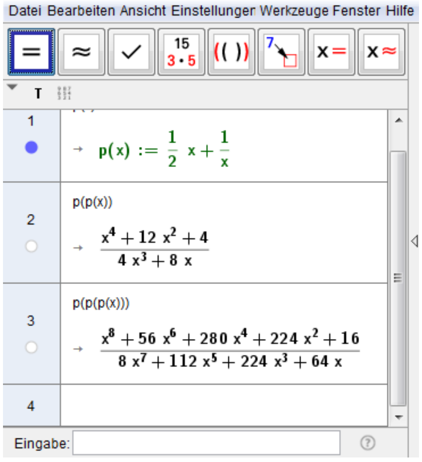
**G 5.20** $s$ ist die Summe einer niederfrequenten und einer hochfrequenten Schwingung. Beachte den Unterschied zu Aufgabe **G 5.18**, in der es um ein Produkt aus einer nieder- und einer hochfrequenten Schwingung geht!

**G 6.02**

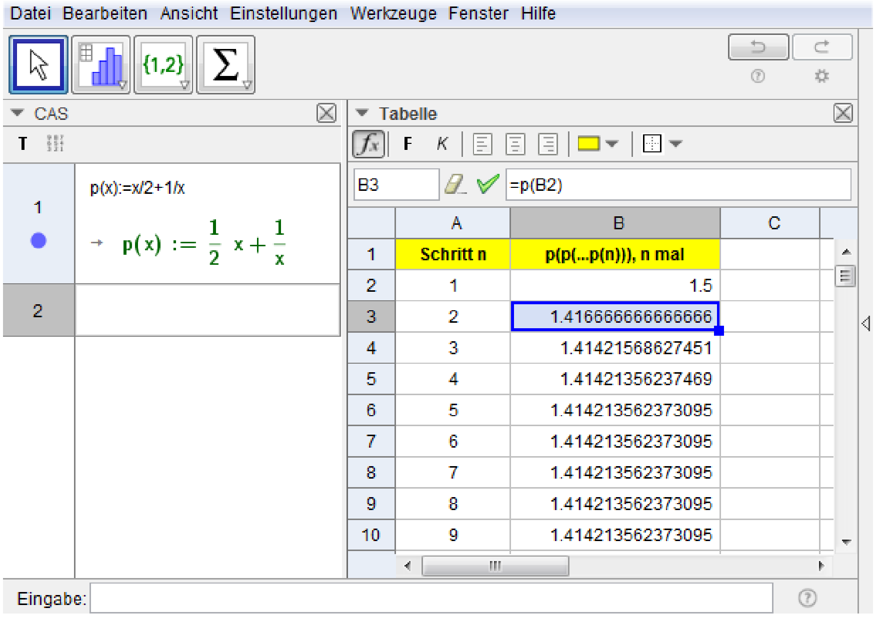


**G 6.03** Gehe vor wie beschrieben!

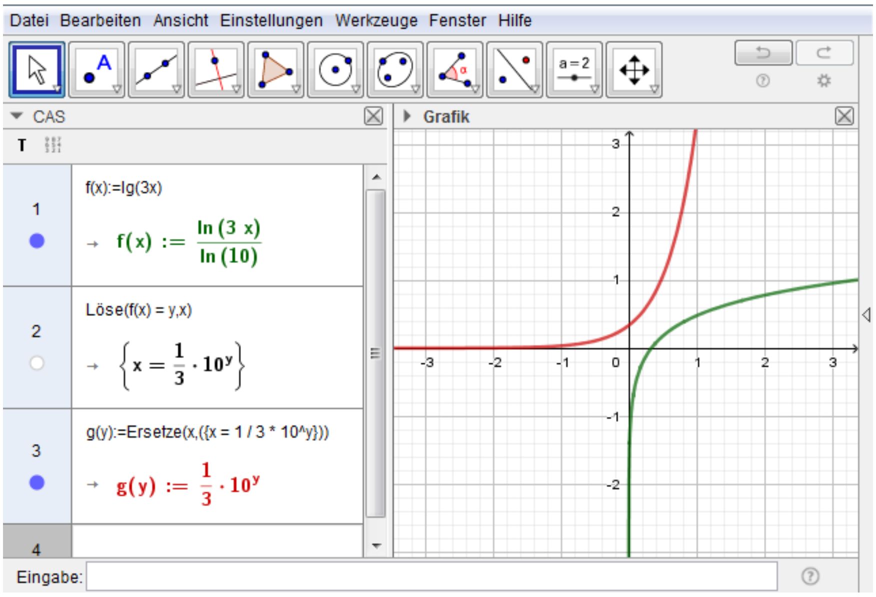
**G 6.04**



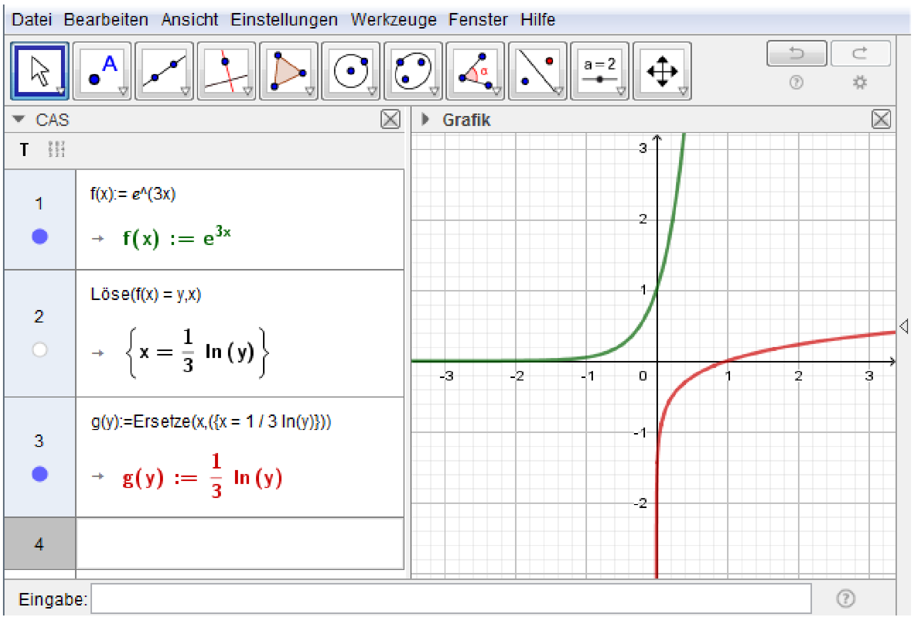

**G 6.05**



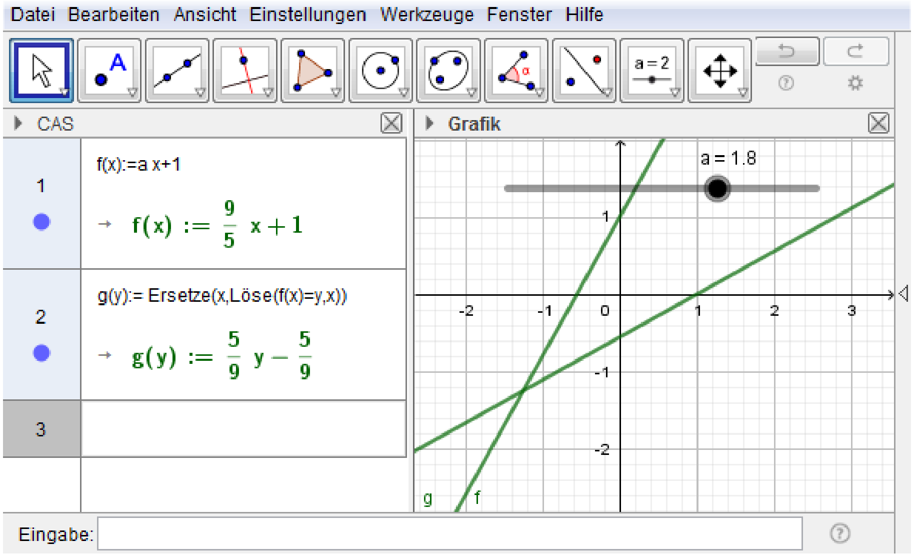

**G 6.07**



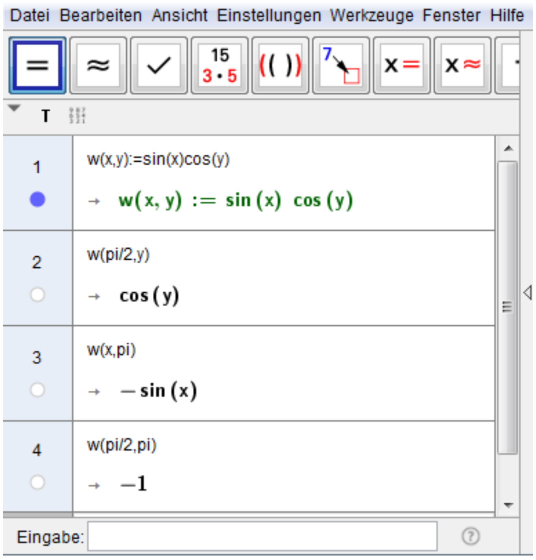
**G 6.08**



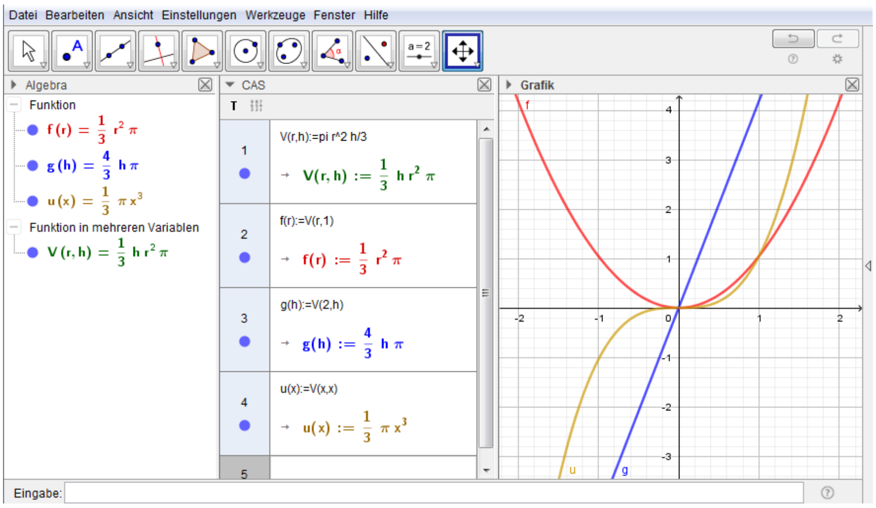

**G 6.09**



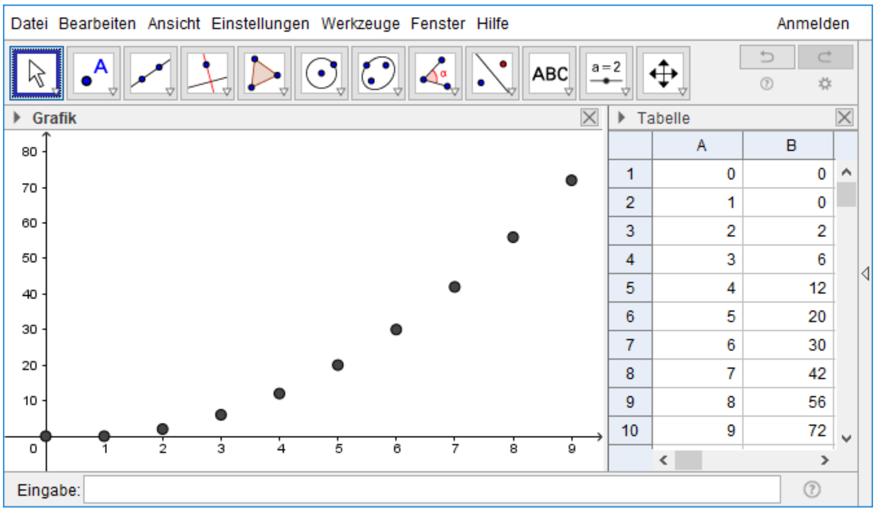

**G 6.11**



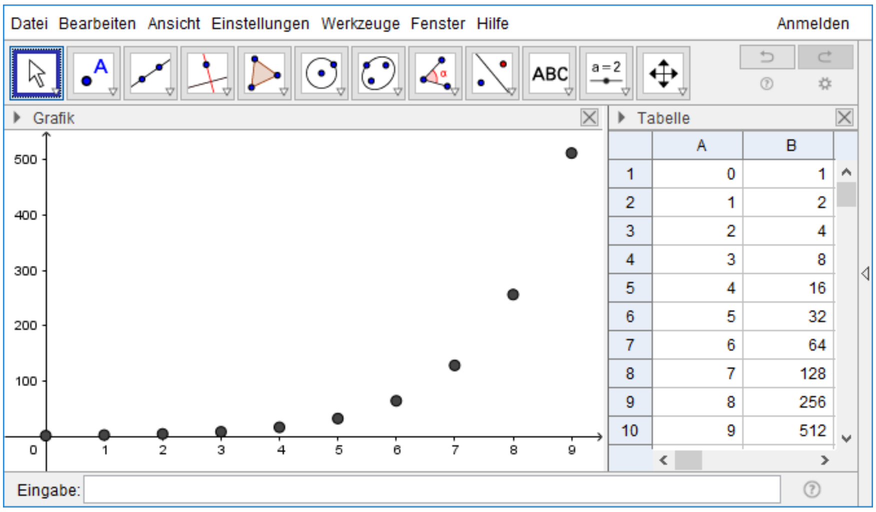
**G 6.12**



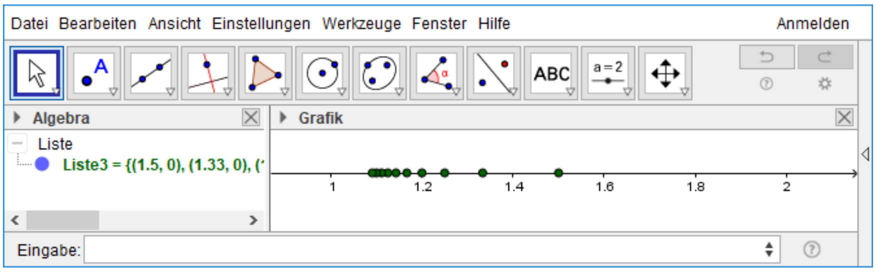

**G 7.03 a)**



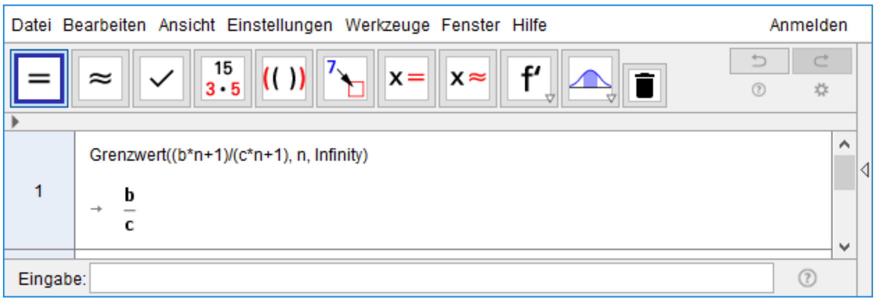

**G 7.03 b)**



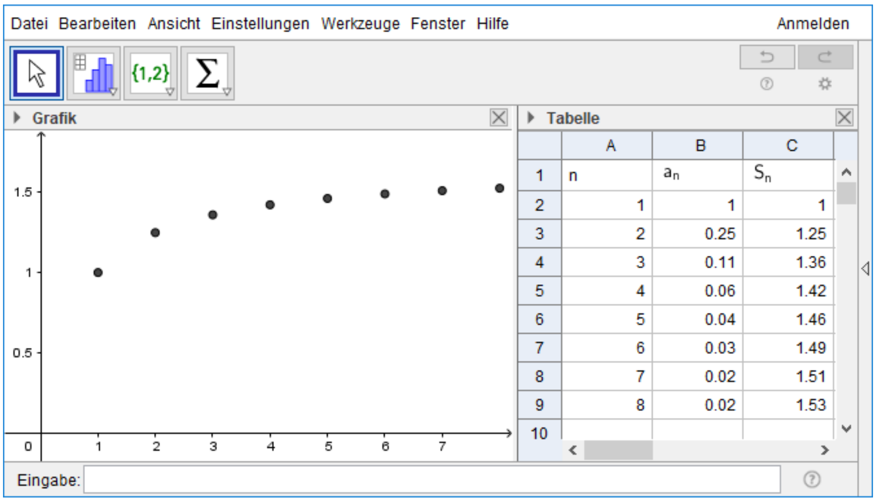

**G 7.05** Vermutung: Der Grenzwert liegt bei 1.



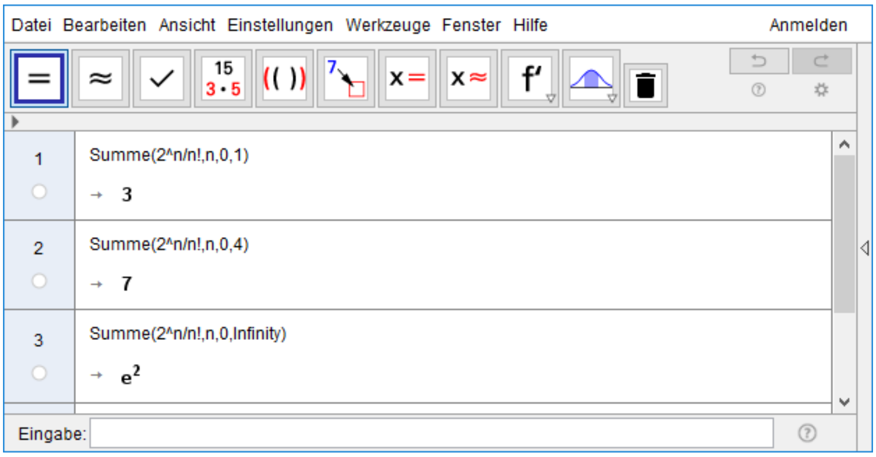
**G 7.07** Wenn man sich **G 7.06 b)** ansieht, kann der Grenzwert bei $\frac{b}{c}$ vermutet werden.



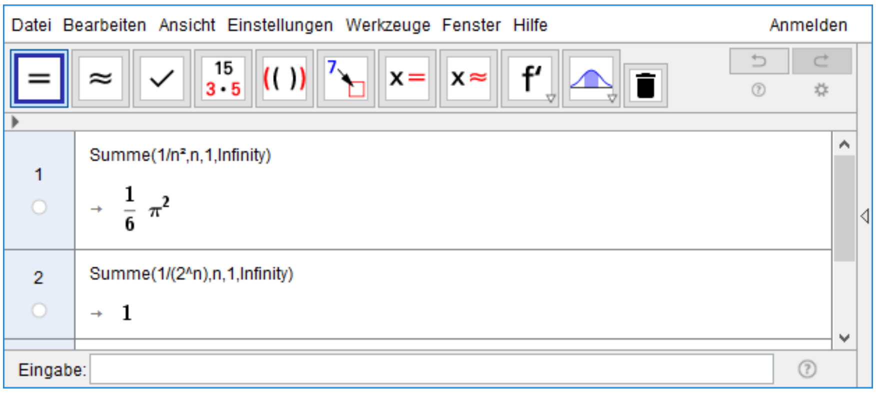

**G 8.02**




**G 8.05**




**G 8.06** Da $\frac{1}{n^2}$ langsamer kleiner wird als $\frac{1}{2^n}$, ist die Summe der ersten Reihe vermutlich größer.

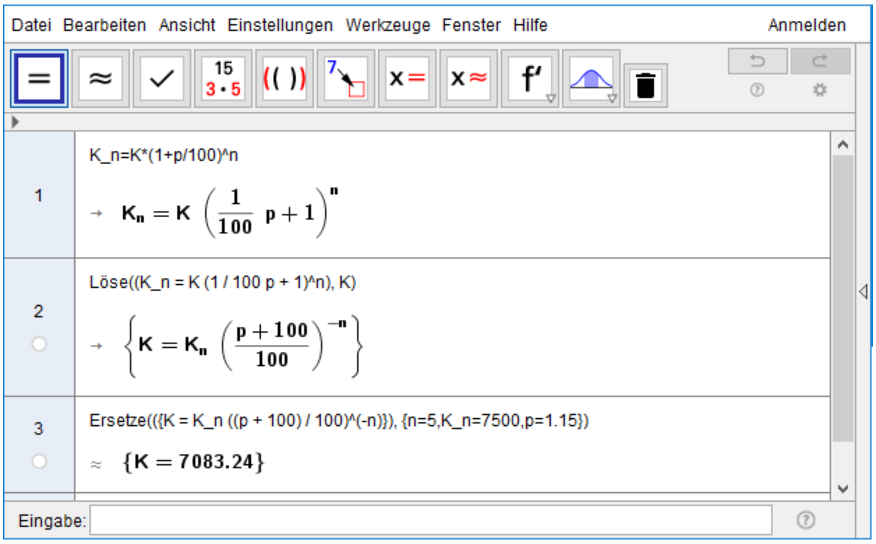


**G 8.08** Werkzeug analog zu **G 8.07**.

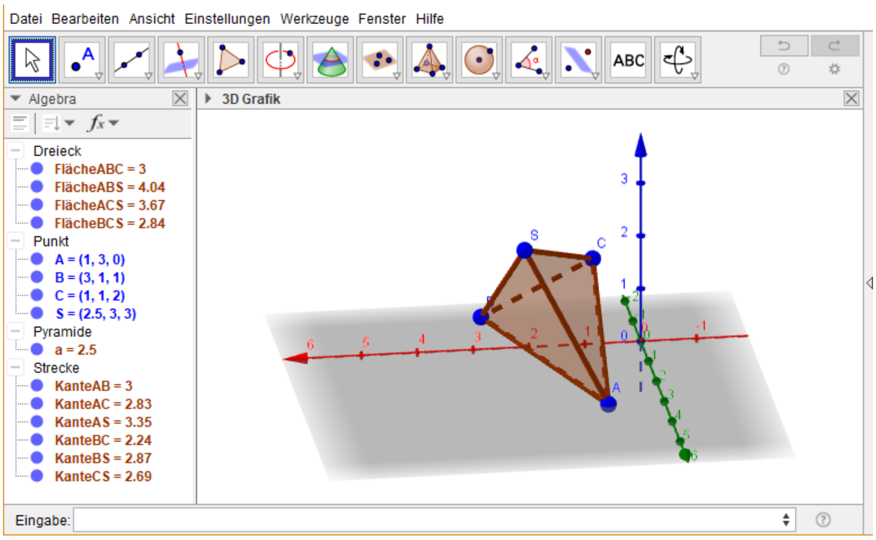
Reihe: $r^2\pi + \left(\frac{r}{2}\right)^2\pi + \left(\frac{r}{4}\right)^2\pi + \cdots$ Reihenglied: $b_n = \left(\frac{r}{2^n}\right)^2\pi$ Summe: $\frac{4}{3}r^2\pi$

**G 8.11** Entweder analog **G 8.10**, oder effektiven Zinssatz für Jan und Ari berechnen und vergleichen:
Jan: $p_{eff} = 1{,}25\ \%$, Ari: $p_{eff} = 0{,}75 \cdot 1{,}5\ \% = 1{,}125\ \%$. Jan hat am Ende mehr Kapital.

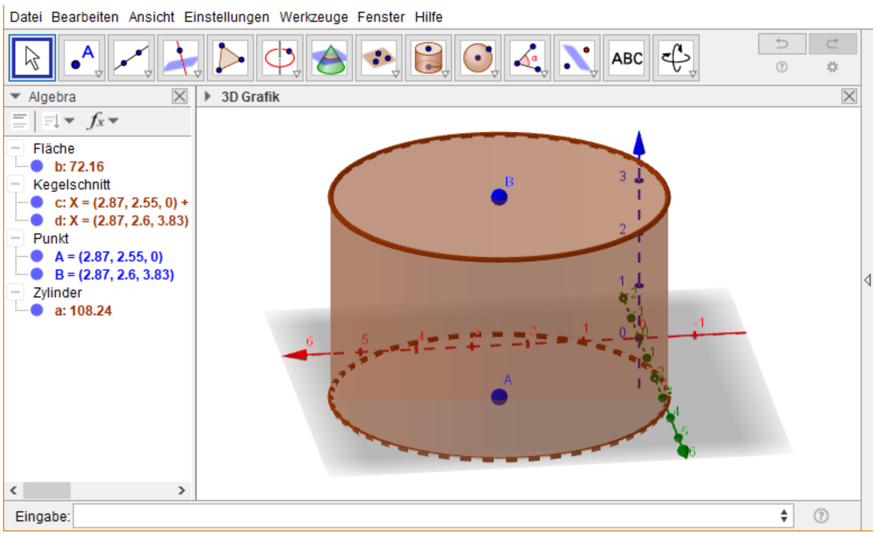
**G 8.13**



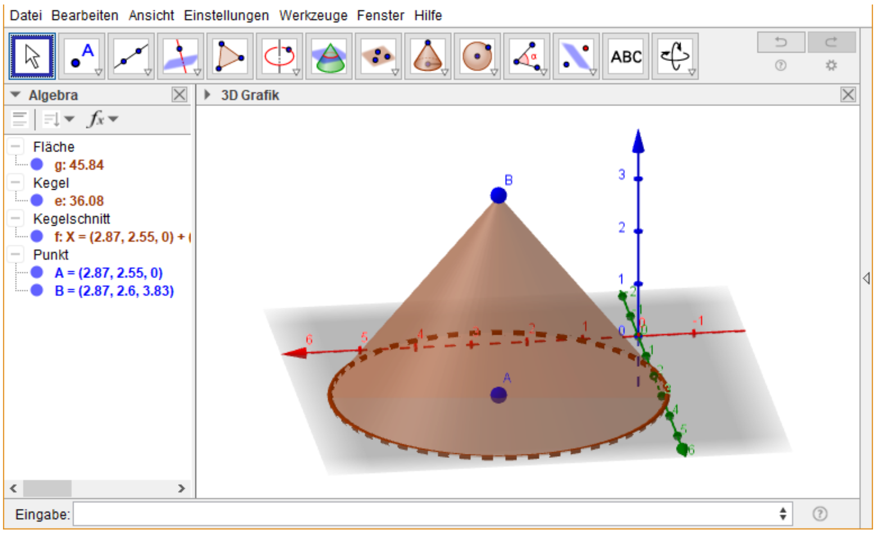

**G 9.12**




**G 9.13 a)**



**G 9.13 b)**




**G 9.14**

$D = (-1 \mid 0 \mid 1),$

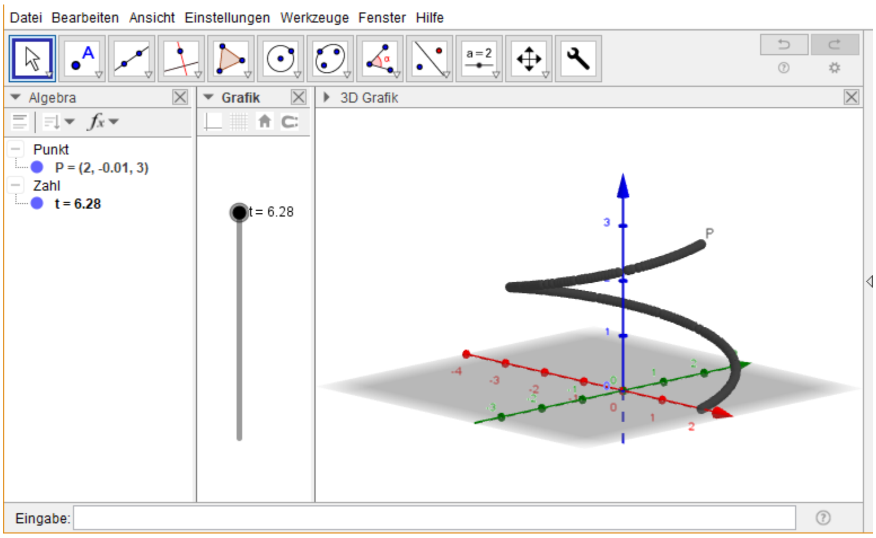
$r = -2$: $A = (5 \mid 0 \mid -2), B = (7 \mid -4 \mid -2), C = (5 \mid -6 \mid -1), D = (3 \mid -2 \mid -1), S = (6 \mid -3.75 \mid 1)$

$r = -1$: $A = (3 \mid 1 \mid -1), B = (5 \mid -3 \mid -1), C = (3 \mid -5 \mid 0), D = (1 \mid -1 \mid 0), S = (4 \mid -2.75 \mid 2)$

$r = 3$: $A = (-5 \mid 5 \mid 3), B = (-3 \mid 1 \mid 3), C = (-5 \mid -1 \mid 4), D = (-7 \mid 3 \mid 4), S = (-4 \mid 1.25 \mid 6)$

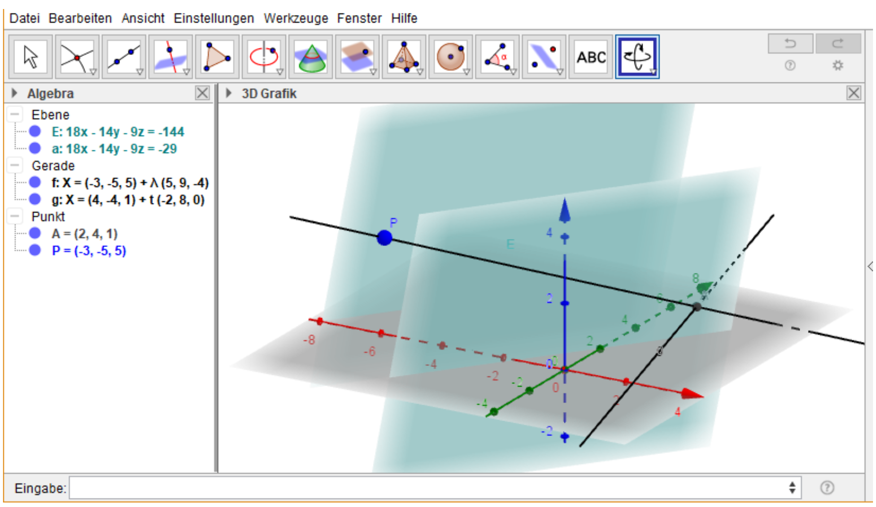
$r = 20$: $A = (-39 \mid 22 \mid 20), B = (-37 \mid 18 \mid 20), C = (-39 \mid 16 \mid 21), D = (-41 \mid 20 \mid 21),$
$S = (-38 \mid 18.25 \mid 23)$

**G 9.15**




**G 10.10** Individuell

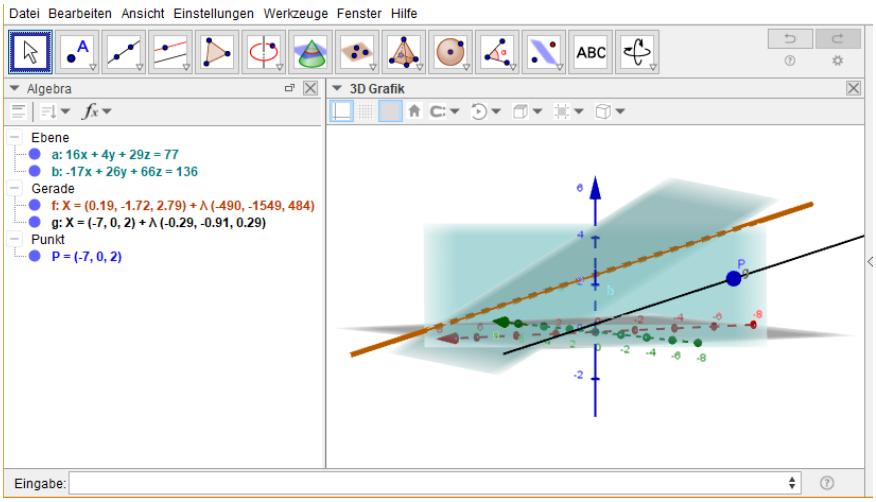
**G 10.11**



**G 10.12** $H = (-2.43 \mid 2.1 \mid 1.58)$ gerundet

**G 10.13** $U = (0.05 \mid 0.23 \mid 1.32)$ gerundet

**G 10.14**



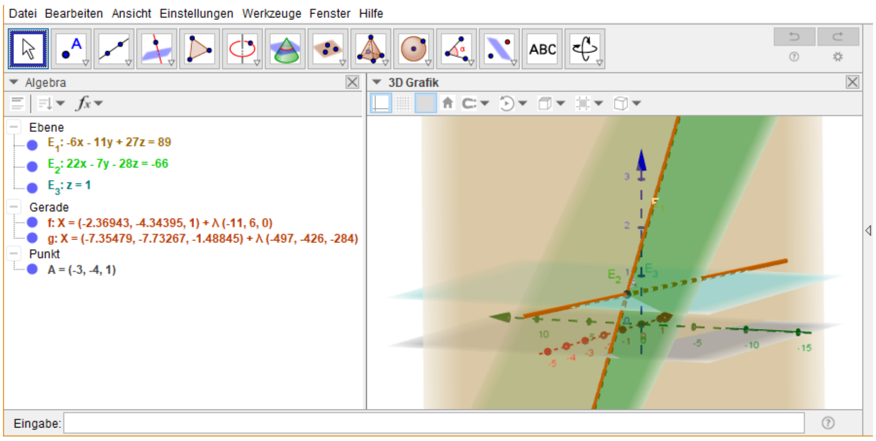

Die gesuchte Gerade ist g!

**G 10.15 – G 10.18** Individuell

**G 10.19** Lösung 1: $C = (6 \mid -1 \mid 2), F_1 = (5.8 \mid -2 \mid -0.1), V = 2.67$

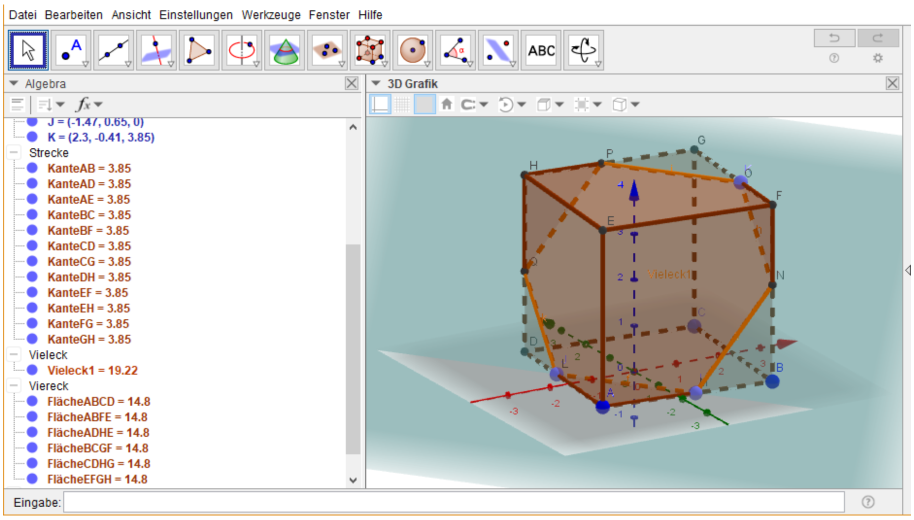
Lösung 2: $C = (6 \mid -1 \mid 2), F_1 = (4.2 \mid -2 \mid 3.1), V = 2.67$

**G 10.20**

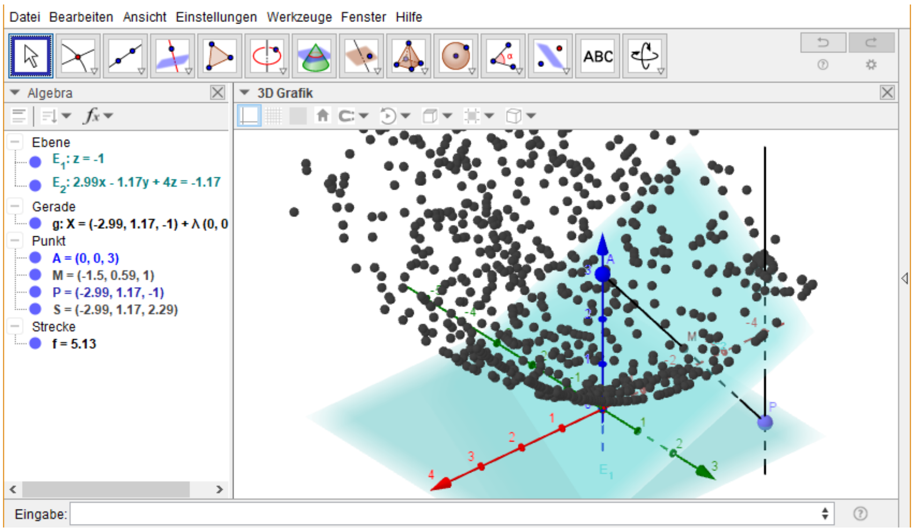



1) Erstelle die beiden Ebenen aus der Angabe!
2) Erstelle die Ebene $z = 1$!
3) Schneide die beiden Ebenen $E_1$ und $E_3$ sowie die Ebenen $E_1$ und $E_2$, man erhält die Geraden f und g!
   Schneide die beiden Geraden f und g, man erhält den Punkt A!
4) Zeichne zwei beliebige Punkte B und C, die nicht auf der Ebene $E_1$ und nicht auf der Ebene $E_2$ liegen.
5) Erstelle eine Ebene d durch die Punkte A, B und C!
   Lies die Gleichung der Ebene ab!
6) Zeichne zwei beliebige Punkte D und E, die nicht auf der $E_1$, $E_2$ und d liegen!
7) Erstelle eine Ebene e durch die Punkte A, D und E!
   Lies die Gleichung der Ebene ab!

**G 10.21**




**G 10.22**

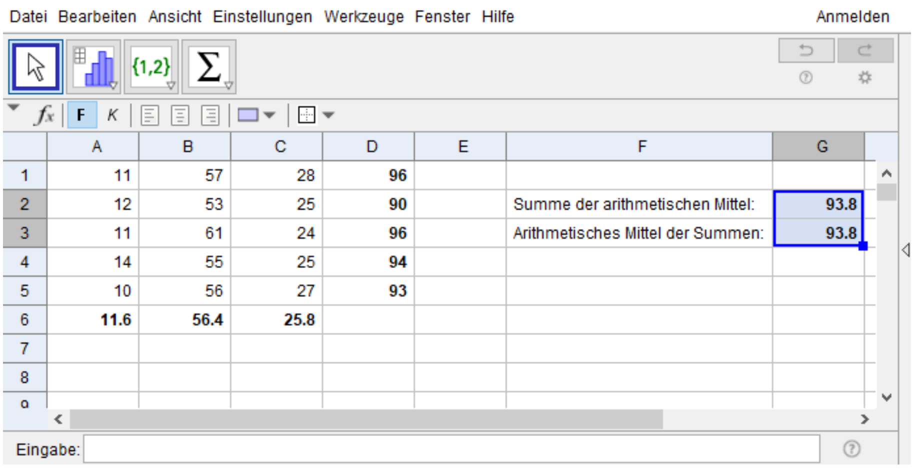



**G 11.03** Kosten für die:

- erste Ware: 3€ pro Stück
- zweite Ware: 4€ pro Stück
- dritte Ware: 1€ pro Stück
- vierte Ware: 2€ pro Stück

**G 12.06** Mittelwert ≈ 2,13 Median = 2 Modus = 2

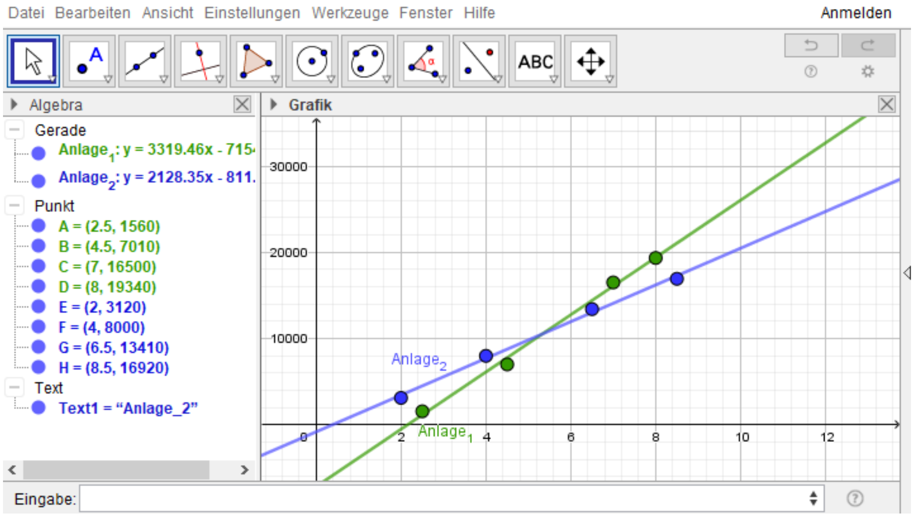
**G 12.07**



| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 57 | 28 | 96 | | | |
| 2 | 12 | 53 | 25 | 90 | | Summe der arithmetischen Mittel: | 93.8 |
| 3 | 11 | 61 | 24 | 96 | | Arithmetisches Mittel der Summen: | 93.8 |
| 4 | 14 | 55 | 25 | 94 | | | |
| 5 | 10 | 56 | 27 | 93 | | | |
| 6 | 11.6 | 56.4 | 25.8 | | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | |

**G 12.10** Gib die Daten in die erste Spalte der Tabellenkalkulation ein!
Markiere danach die Daten und betätige das entsprechende Werkzeug!
Das Minimum ist $223$, das Maximum ist $242$.

**G 12.15**




Familie Grün sollte sich für Anlage 1 entscheiden, da sie für eine Windgeschwindigkeit von $6\ m/s$ den höheren Ertrag liefert.