

# Mathematik verstehen 7. GeoGebra, Technologietraining Lösungen

## G 1.02

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe  
 = ≈ ✓  $15$   
 $3 \cdot 5$  ( ( )  $7$   $x =$   $x \approx$   $f'$   
 T  
 1  $f(x) := x^3 + 2x^2 - 7x - 12$   
 →  $f(x) := x^3 + 2x^2 - 7x - 12$   
 2 Faktorisiere(f)  
 →  $(x + 3)(x^2 - x - 4)$   
 3 Löse( $x^2 - x - 4 = 0, x$ )  
 →  $\left\{ x = \frac{-\sqrt{17} + 1}{2}, x = \frac{\sqrt{17} + 1}{2} \right\}$   
 4 Löse( $f(x) = 0, x$ )  
 →  $\left\{ x = -3, x = \frac{-\sqrt{17} + 1}{2}, x = \frac{\sqrt{17} + 1}{2} \right\}$   
 Eingabe:

## G 1.03

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe  
 = ≈ ✓  $15$   
 $3 \cdot 5$  ( ( )  $7$   $x =$   $x \approx$   $f'$   
 T  
 1  $f(x) := 2x^3 - 11x^2 + 3x + 30$   
 →  $f(x) := 2x^3 - 11x^2 + 3x + 30$   
 2 Faktorisiere(f)  
 →  $(2x - 5)(x^2 - 3x - 6)$   
 3 Löse( $x^2 - 3x - 6 = 0, x$ )  
 →  $\left\{ x = \frac{-\sqrt{33} + 3}{2}, x = \frac{\sqrt{33} + 3}{2} \right\}$   
 4 Löse( $f(x) = 0, x$ )  
 →  $\left\{ x = \frac{-\sqrt{33} + 3}{2}, x = \frac{5}{2}, x = \frac{\sqrt{33} + 3}{2} \right\}$   
 Eingabe:



G 1.04

The screenshot shows the algebra view of GeoGebra with the following content:

Objekt	Definition	Ergebnis
1	$f(x) := x^3 + 3x^2 - 2x - 4$	$f(x) := x^3 + 3x^2 - 2x - 4$
2	$g(x) := x^3 + 3x^2 - 2x - 5$	$g(x) := x^3 + 3x^2 - 2x - 5$
3	Faktorisiere(f)	$(x + 1)(x^2 + 2x - 4)$
4	Faktorisiere(g)	$x^3 + 3x^2 - 2x - 5$

At the bottom, there is an input field labeled "Eingabe:" which is currently empty.

Die linke Seite der zweiten Gleichung kann über den rationalen Zahlen nicht faktorisiert werden. Daher gibt GeoGebra den Term für g unverändert aus. Um die Gleichung zumindest näherungsweise zu lösen, muss man zu numerischen Methoden greifen, z.B. den Graphen der Funktion g im Grafikenfenster betrachten und seine Schnittpunkte mit der ersten Achse bestimmen.

G 1.05

The screenshot shows the algebra view of GeoGebra with the following content:

Objekt	Definition	Ergebnis
1	$f(x) := x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$	$f(x) := x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$
2	Faktorisiere(f)	$(x - 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2)$

At the bottom, there is an input field labeled "Eingabe:" which is currently empty.



## G 1.06

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe  
 = ≈ ✓ 15 3·5 (( )) 7 x = x ≈ f'

1	$f(x) := x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 3x + 14$ $\rightarrow f(x) := x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 3x + 14$
2	Faktorisiere(f) $\rightarrow (x - 2)(x + 1)(x^2 + 5x - 7)$
3	Löse( $x^2 + 5x - 7 = 0, x$ ) $\rightarrow \left\{ x = \frac{-\sqrt{53} - 5}{2}, x = \frac{\sqrt{53} - 5}{2} \right\}$

Eingabe:

## G 1.07

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe  
 = ≈ ✓ 15 3·5 (( )) 7 x = x ≈

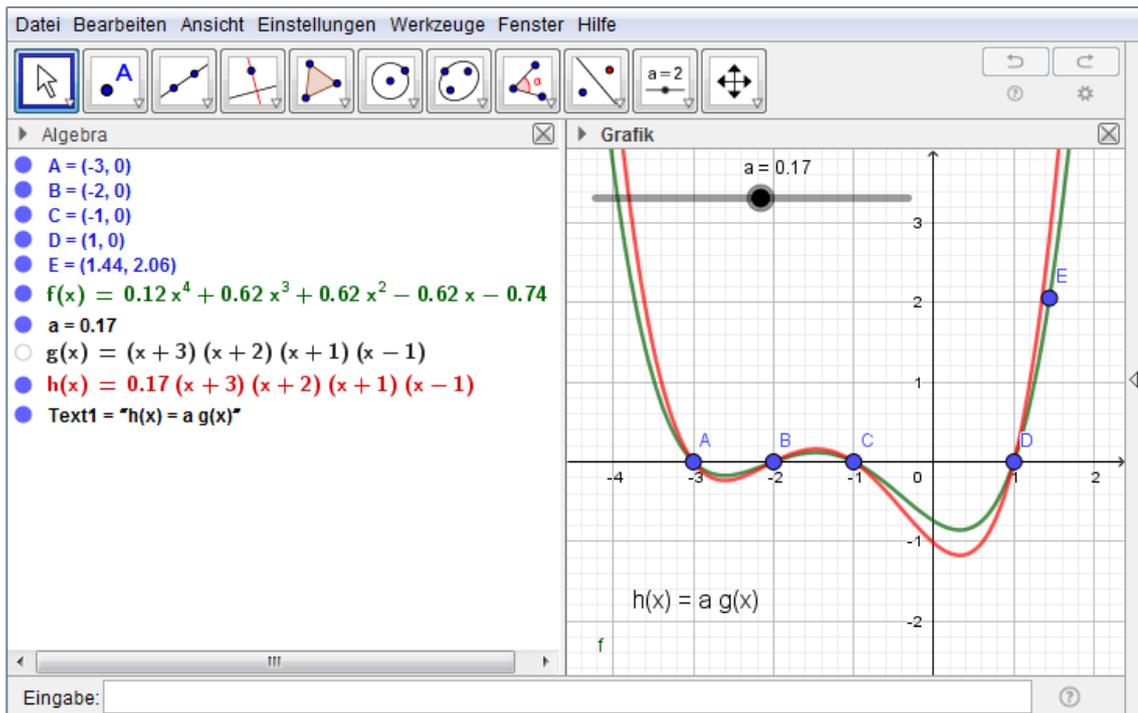
1	$f(x) := x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 3x - 14$ $\rightarrow f(x) := x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 3x - 14$
2	Faktorisiere(f) $\rightarrow (x - 1)(x + 2)(x^2 + 5x + 7)$
3	Löse( $x^2 + 5x + 7 = 0, x$ ) $\rightarrow \{ \}$

Eingabe:

Die einzigen (reellen) Lösungen sind 1 und -2. Die in Zeile 3 eingegebene Gleichung besitzt keine reelle Lösung, daher gibt GeoGebra das Symbol  $\{ \}$  aus.



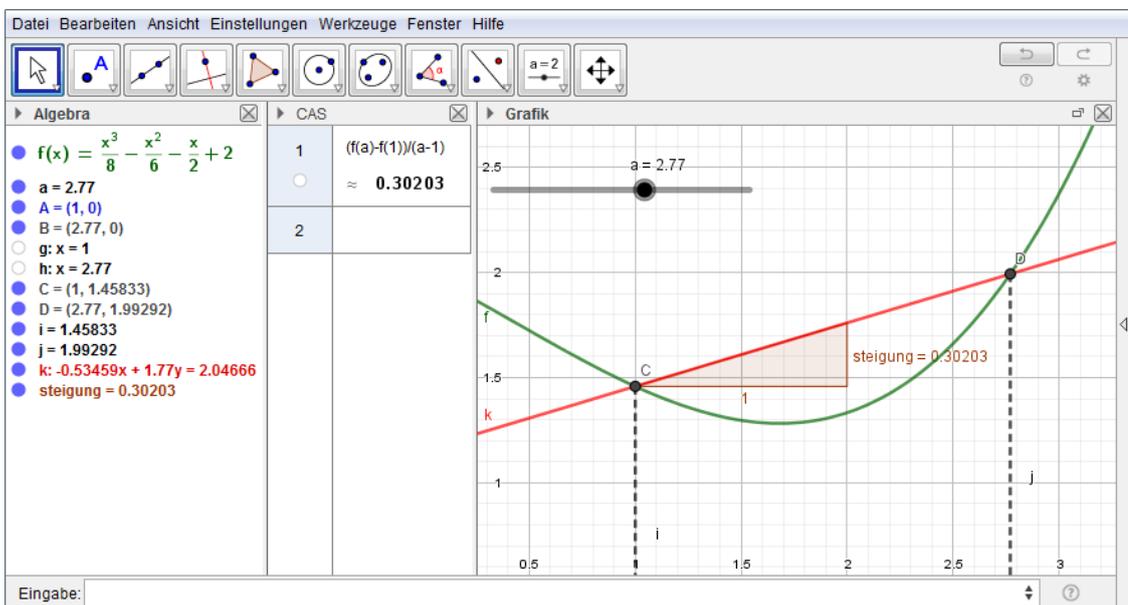
G 1.10



G 2.02

Bei  $a = 1$  wird die Gerade  $k$  nicht angezeigt, und im Algebrafenster steht „ $k$  undefiniert“. Das CAS zeigt anstelle der mittleren Änderungsrate ein Fragezeichen. Das rührt daher, dass die mittlere Änderungsrate, d.h. die Steigung der Geraden  $k$ , für  $a = 1$  auf den (sinnlosen) Bruch  $0/0$  führt.

G 2.03



G 2.04

=  ≈  ✓  15  
 3 · 5  ( ( ) )  7  x =  x :

T

1	$f(x) := x^2 / 8 - x^2 / 6 - x / 2 + 2$ $\rightarrow f(x) := \frac{1}{8} x^3 - \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{2} x + 2$
2	$aend1 := (f(q) - f(1)) / (q - 1)$ $\rightarrow aend1 := \frac{1}{8} q^2 - \frac{1}{24} q - \frac{13}{24}$
3	Faktorisiere( $f(q) - f(1)$ ) $\rightarrow (q - 1) \cdot \frac{3q^2 - q - 13}{24}$
4	$aend2 := (3q^2 - q - 13) / 24$ $\rightarrow aend2 := \frac{1}{24} (3q^2 - q - 13)$
5	$\{Ersetze(aend1, q, 1), Ersetze(aend2, q, 1)\}$ $\rightarrow \left\{ -\frac{11}{24}, -\frac{11}{24} \right\}$

Eingabe:

G 2.05

=  ≈  ✓  15  
 3 · 5  ( ( ) )  7  x =  x :

T

1	$g(x) := 2x^3 - x^2 + 5x - 2$ $\rightarrow g(x) := 2x^3 - x^2 + 5x - 2$
2	$aend1 := (g(h) - g(0)) / h$ $\rightarrow aend1 := 2h^2 - h + 5$
3	Faktorisiere( $g(h) - g(0)$ ) $\rightarrow h (2h^2 - h + 5)$
4	$aend2 := 2h^2 - h + 5$ $\rightarrow aend2 := 2h^2 - h + 5$
5	$\{Ersetze(aend1, h, 0), Ersetze(aend2, h, 0)\}$ $\rightarrow \{5, 5\}$

Eingabe:



G 2.07

The screenshot shows the algebra window of GeoGebra. At the top, there is a menu bar with 'Dat', 'Bearbe', 'Ansi', 'Einstellu', 'Werkze', 'Fens', and 'Hilt'. Below the menu is a toolbar with icons for '=' (highlighted), '≈', '✓', '3.5', and '(() )'. The main area contains a list of objects:

- Object 1:  $w(x) := \sin(x)/x$ . The input field shows  $w(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ .
- Object 2:  $\text{Grenzwert}(w(x), x, 0)$ . The input field shows  $1$ .

At the bottom, there is an 'Eingabe:' field and a help icon.

G 2.08 Sobald die x-Koordinate des Punktes A gleich 0 ist, ist er im Grafikenfenster nicht mehr zu sehen, und im Algebrafenster steht „A undefiniert“. Das rührt daher, dass der Punkt  $A = (0,1)$  gar nicht zum Graphen der Funktion  $w$  gehört: Die Funktion  $w$  ist ja nur für  $x \neq 0$  definiert.

G 2.09

The screenshot shows the algebra window of GeoGebra. At the top, there is a menu bar with 'Dat', 'Bearbe', 'Ansi', 'Einstellu', 'Werkze', 'Fens', and 'Hilt'. Below the menu is a toolbar with icons for '=' (highlighted), '≈', '✓', '15', '3.5', '(() )', and '7'. The main area contains a list of objects:

- Object 1:  $f(x) := \text{sqrt}(x + 1)$ . The input field shows  $f(x) := \sqrt{x + 1}$ .
- Object 2:  $(f(x) - f(1)) / (x - 1)$ . The input field shows  $\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{x + 1}}{x - 1}$ .
- Object 3:  $\text{Grenzwert}(\$2, x, 1)$ . The input field shows  $\frac{1}{4} \sqrt{2}$ .

At the bottom, there is an 'Eingabe:' field and a help icon.

Es handelt sich um den Grenzwert der mittleren Änderungsrate von  $f$  im Intervall  $[1, x]$  (falls  $x > 1$ ) bzw.  $[x, 1]$  (falls  $x < 1$ ) für  $x \rightarrow 1$ . Er ist gleich der Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle 1 und damit gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(1, f(1))$ .



G 2.10

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeug Fenster Hilfe

**=**  $\approx$    $\frac{15}{3 \cdot 5}$   $(( ))$   $\frac{7}{\square}$   $\times =$   $\times$

T

1	$g(x) := x^3 - x^2 + 3x - 1$ → $g(x) := x^3 - x^2 + 3x - 1$
2	Faktorisiere( $g(x) - g(2)$ ) → $(x - 2)(x^2 + x + 5)$
3	grenzwert1=Ersetze( $x^2 + x + 5, x, 2$ ) $\alpha$ → <b>grenzwert1 = 11</b>
4	grenzwert2=Grenzwert( $(g(x) - g(2))/(x - 2), x, 2$ ) → <b>grenzwert2 = 11</b>

Eingabe:  ?

G 2.11

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeug Fenster Hilfe

**=**  $\approx$    $\frac{15}{3 \cdot 5}$   $(( ))$   $\frac{7}{\square}$

T

1	Grenzwert( $(x - 1 + \sqrt{1 + x})/x, x, 0$ ) → $\frac{3}{2}$
---	--

Eingabe:  ?

G 2.12

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeug Fenster Hilfe

**=**  $\approx$    $\frac{15}{3 \cdot 5}$   $(( ))$   $\frac{7}{\square}$

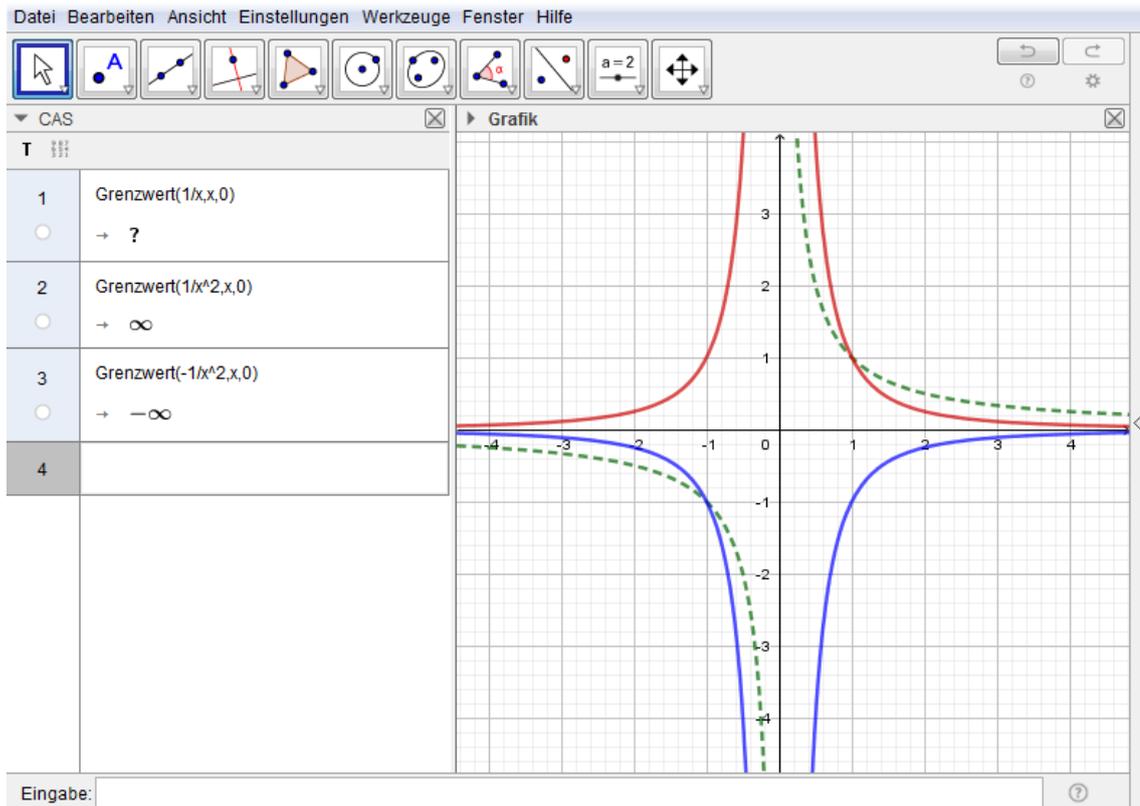
T

1	Grenzwert( $(\exp(x) - 1)/x, x, 0$ ) → <b>1</b>
---	--

Eingabe:  ?



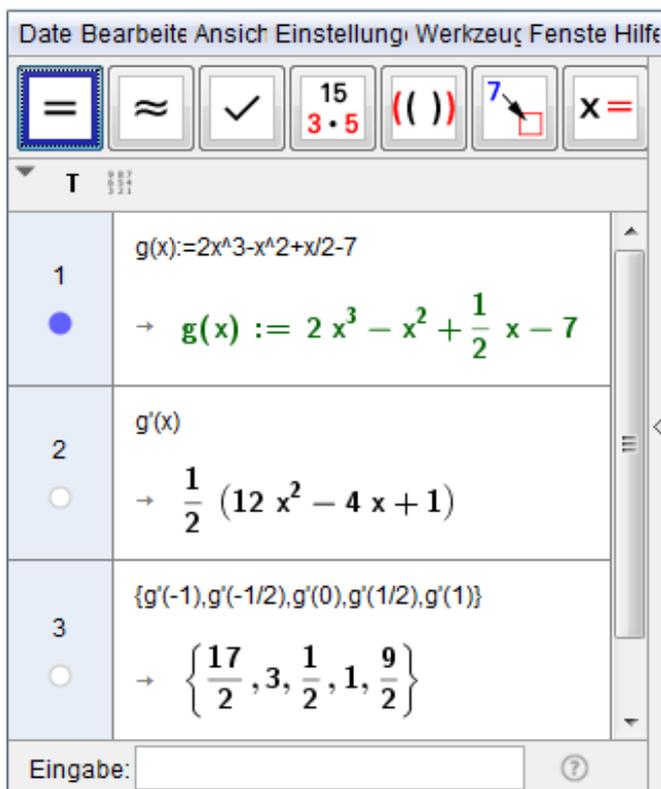
G 2.13



Die Graphen:  $\frac{1}{x}$  (grün strichliert),  $\frac{1}{x^2}$  (rot),  $-\frac{1}{x^2}$  (blau).

Für  $x \rightarrow 0$  steigt  $\frac{1}{x^2}$  über jede Grenze (das ist mit dem Symbol  $\infty$  gemeint),  $-\frac{1}{x^2}$  fällt unter jede Grenze (das ist mit dem Symbol  $-\infty$  gemeint), aber  $\frac{1}{x}$  besitzt kein derartiges Verhalten (daher das Fragezeichen).

G 2.15



G 2.16

The screenshot shows the CAS window with the following steps:

- Step 1:  $f(x) := (x^2 - 4) / (x + 3)$   
 $\rightarrow f(x) := \frac{x^2 - 4}{x + 3}$
- Step 2:  $f(x)$   
 $\rightarrow \frac{x^2 + 6x + 4}{x^2 + 6x + 9}$
- Step 3:  $g(x) := \text{Faktoriere}(\$2)$   
 $\rightarrow g(x) := \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2}$

The input field at the bottom is empty.

Diese Aufgabe zeigt, dass ein nachfolgender Vereinfachungsversuch des Ergebnisterms durchaus sinnvoll ist!

G 2.17

The screenshot shows the CAS and Graphics views for the function  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$ .

**Algebra View:**

- $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$
- $A = (-2, -3)$
- $B = (2, -3)$
- $g: y = -12x - 27$
- $h: y = 12x - 27$

**CAS View:**

- Step 1:  $f(x) := x^4 - 5x^2 + 1$
- Step 2:  $f(-2)$   
 $\rightarrow -12$
- Step 3:  $f(2)$   
 $\rightarrow 12$

**Graphics View:** Shows the graph of  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$  (green curve) and its tangent lines at points A(-2, -3) and B(2, -3) (dashed red lines).

Die Berechnung erfolgt zunächst im CAS. Es fällt auf, dass sich  $f'(-2)$  und  $f'(2)$  nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Das rührt daher, dass  $f$  eine gerade Funktion ist, d.h. dass stets  $f(-x) = f(x)$  gilt, ihr Graph also symmetrisch zur zweiten Achse ist. Das ist im Grafikenster schön zu sehen.



G 2.18

Dat Bearbei Ansicht Einstellur Werkze Fens' Hill

$\frac{15}{3 \cdot 5}$   $(( ))$   $\frac{7}{7}$

**1**  
 $w(t) := 1/(t^2+4)$   
 $\rightarrow w(t) := \frac{1}{t^2+4}$

**2**  
 $w'(t)$   
 $\rightarrow -2 \cdot \frac{t}{t^4+8t^2+16}$

**3**  
 Faktorisiere(\$2)  
 $\rightarrow -2 \cdot \frac{t}{(t^2+4)^2}$

Eingabe:

G 2.19

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe

**Algebra**  

- $c = 2.3$
- $f(x) = 2.3(x^3 - x)$
- $f'(x) = 6.9x^2 - 2.3$

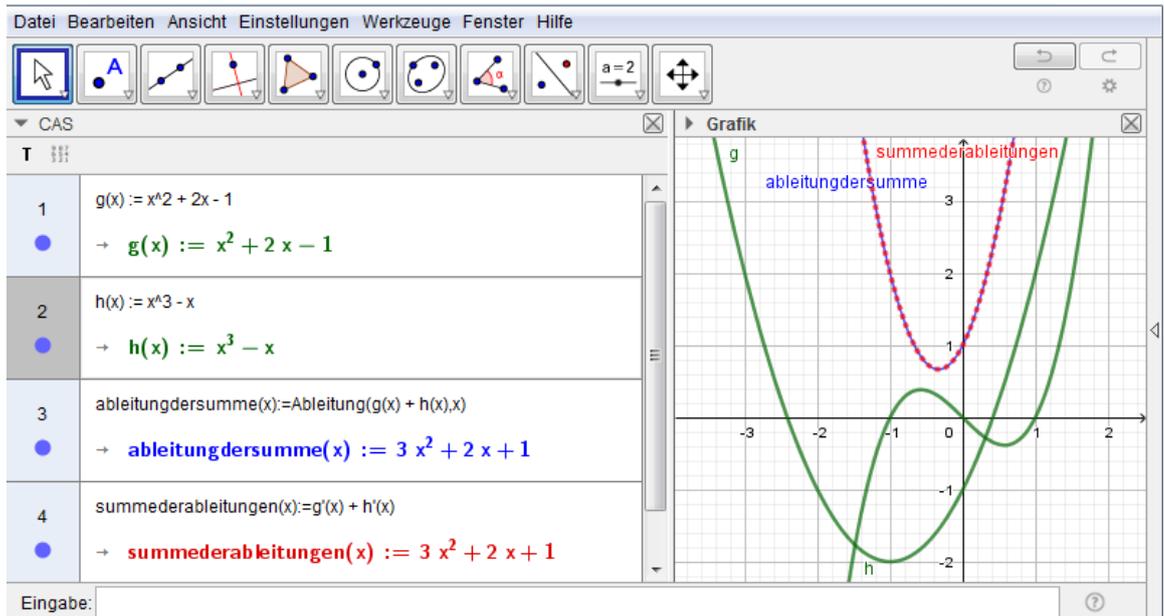
**Grafik**  
 $c = 2.3$   
 Graph showing the function  $f$  (green) and its derivative  $f'$  (red) on a coordinate system. The x-axis ranges from -1.5 to 1.5, and the y-axis ranges from -2 to 2. The function  $f$  is a cubic curve with a local maximum at  $x \approx -0.5$  and a local minimum at  $x \approx 0.5$ . The derivative  $f'$  is a parabola opening upwards with its vertex at  $x = 0$ . The x-intercepts of  $f'$  are at  $x = -0.5$  and  $x = 0.5$ , which correspond to the local extrema of  $f$ .

Eingabe:

Für  $c \neq 0$  gilt: Die Nullstellen von  $f'$  fallen stets mit den lokalen Extremstellen von  $f$  zusammen.  
 Begründung: An jeder lokalen Extremstelle  $x$  von  $f$  gilt  $f'(x)=0$ . Da die Funktion  $f$  keine Terrassenstellen besitzt, ist tatsächlich *jede* Nullstelle von  $f'$  eine lokale Extremstelle von  $f$ .

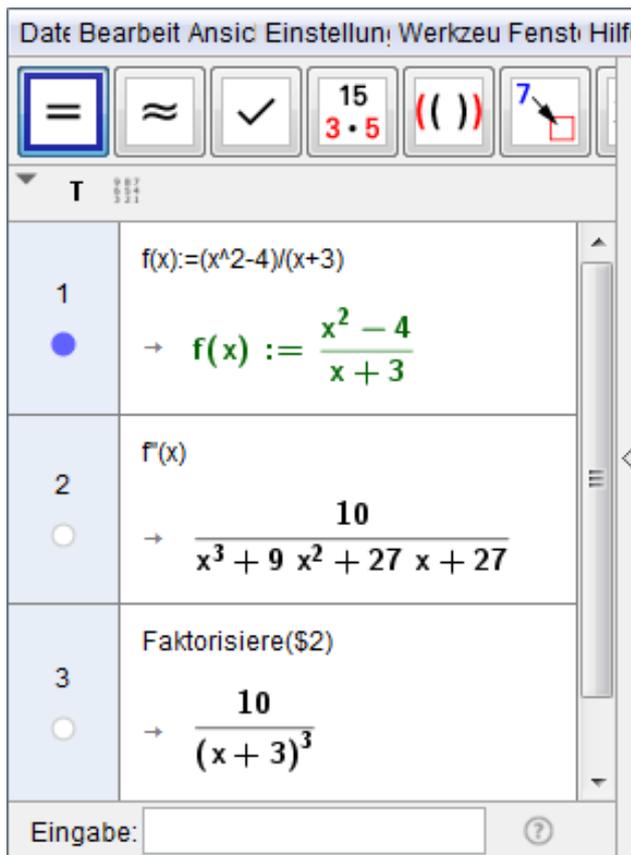


G 2.20



Im CAS ist die Gleichheit der Funktionsterme für die Ableitung der Summe und für die Summe der Ableitungen zu sehen. Der Graph der Ableitung der Summe ist blau, der Graph der Summe der Ableitungen ist rot punktiert dargestellt – klarerweise fallen die beiden Graphen zusammen.

G 2.22



## G 2.23

The screenshot shows the CAS view of GeoGebra with the following steps:

Step	Command	Result
1	$w(t) := 1/(t^2+4)$	$w(t) := \frac{1}{t^2 + 4}$
2	$w'(t)$	$-2 \cdot \frac{t}{t^4 + 8t^2 + 16}$
3	Faktorisiere(\$2)	$-2 \cdot \frac{t}{(t^2 + 4)^2}$
4	$w''(t)$	$\frac{6t^2 - 8}{t^6 + 12t^4 + 48t^2 + 64}$
5	Faktorisiere(\$4)	$2 \cdot \frac{3t^2 - 4}{(t^2 + 4)^3}$

Eingabe:

## G 2.24

The screenshot shows the CAS view of GeoGebra with the following steps:

Step	Command	Result
1	$g(x) := 1/(1-x)$	$g(x) := -\frac{1}{x-1}$
2	Folge(Ersetze(Ableitung( $g(x)$ , $x$ , $n$ ), $x, 0$ ), $n$ , 1, 6)	$\{1, 2, 6, 24, 120, 720\}$
3	Folge( $n!$ , $n$ , 1, 10)	$\{1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800\}$
4	Folge(Ersetze(Ableitung( $g(x)$ , $x$ , $n$ ), $x, 0$ ), $n$ , 7, 10)	$\{5040, 40320, 362880, 3628800\}$

Eingabe:

In Zeile 2 werden die Ableitungen an der Stelle 0 bis zur sechsten Ordnung berechnet. (Beachte, wie bequem das geht, wenn man die Befehle „Folge“ und „Ersetze“ kennt!) Vermutung:  $g^{(n)}(0) = n!$ . Die Überprüfung der Vermutung bis zur zehnten Ordnung erfolgt in den Zeilen 3 und 4. (Tatsächlich gilt sie für alle  $n$ ).



G 2.25

The screenshot shows the CAS interface with the following content:

- Menu: Datei Bearbeiten Ansicht Einstellung Werkzeug Fenster Hilfe
- Toolbar: =, ≈, ✓, 15, 3.5, ( ( ) ), 7, x=
- Input field: T
- Step 1:  $h(t) := h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$
- Step 2:  $h'(t) \rightarrow -g t + v_0$
- Step 3:  $h''(t) \rightarrow -g$
- Input field: Eingabe: ?

Die Geschwindigkeit  $h'$  ist eine lineare Funktion mit Änderungsrate  $-g$ . Die Beschleunigung  $h''$  ist eine konstante Funktion mit Wert  $-g$ . Physikalisch bedeutet das: Die Geschwindigkeit ändert sich in gleichen Zeitintervallen  $\Delta t$  um den gleichen Wert, nämlich  $-g\Delta t$ . Die Beschleunigung ist konstant und hat den Wert  $-g$ .

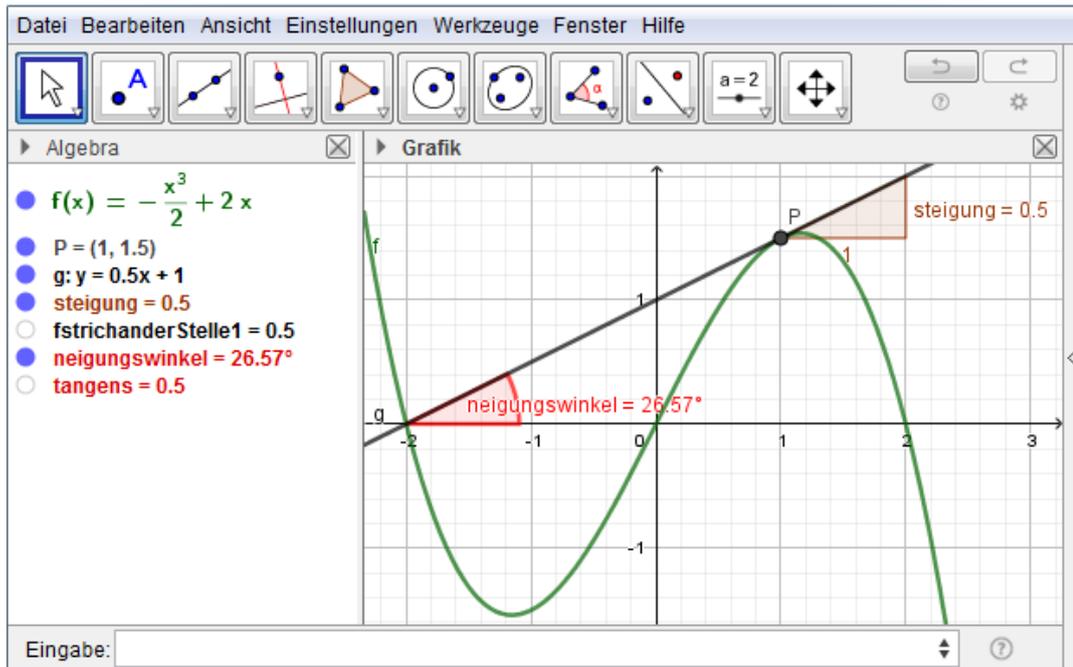
G 2.27

The screenshot shows the Algebra and Graphics views with the following content:

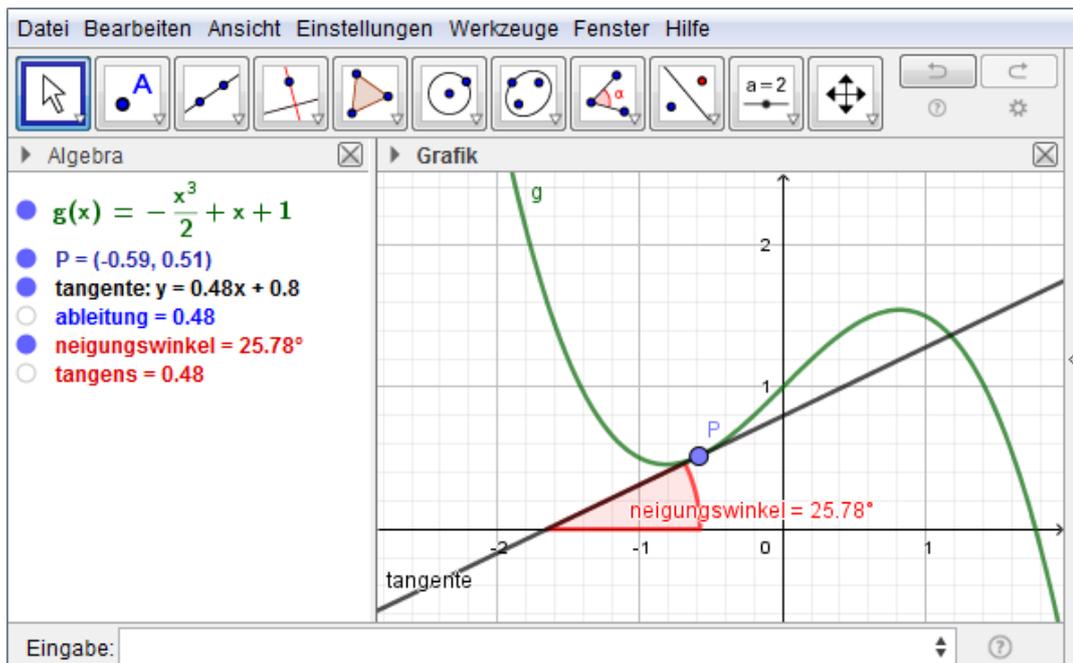
- Menu: Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe
- Toolbar: Mouse, A, Point, Line, Circle, Arc, Angle, Slope, a=2, Move, Undo, Redo, Settings
- Algebra View:
  - $f(x) = -\frac{x^3}{2} + 2x$
  - $P = (1, 1.5)$
  - $g: y = 0.5x + 1$
  - steigung = 0.5
  - fstrichanderStelle1 = 0.5
- Graphics View:
  - Graph of  $f(x) = -\frac{x^3}{2} + 2x$  (green curve) and its tangent line  $g: y = 0.5x + 1$  (black line) at point  $P(1, 1.5)$ .
  - A right-angled triangle is drawn to show the slope of the tangent line, labeled "steigung = 0.5".
  - The x-axis is labeled with 0, 1, 2, 3. The y-axis is labeled with 0, 1, 2.
- Input field: Eingabe: ?



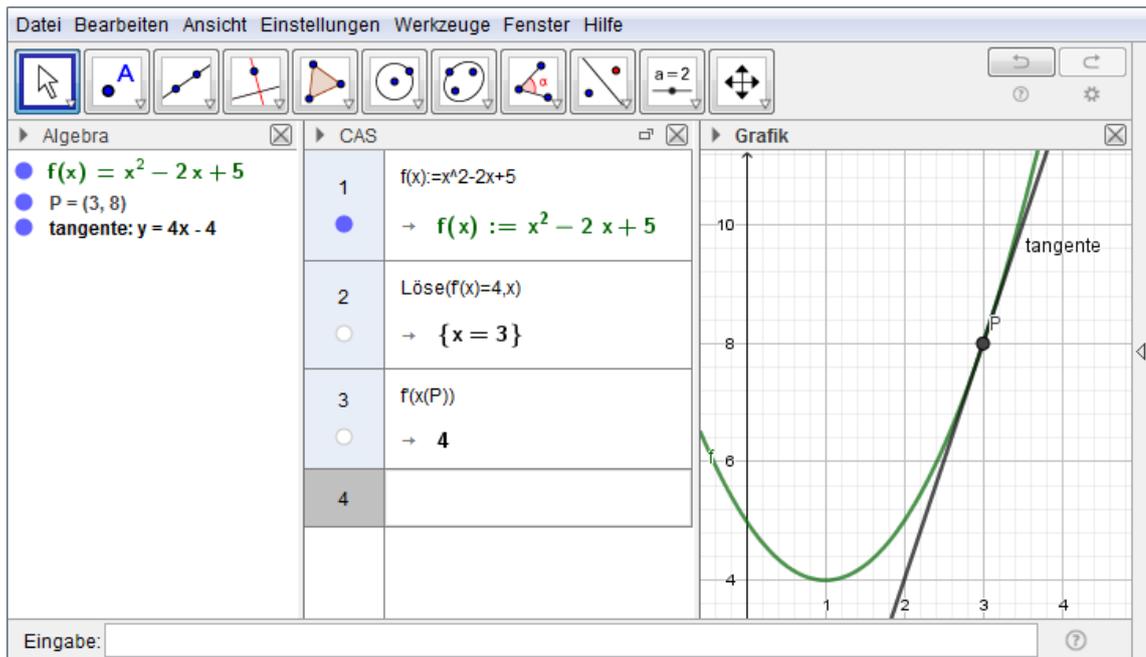
G 2.28



G 2.29

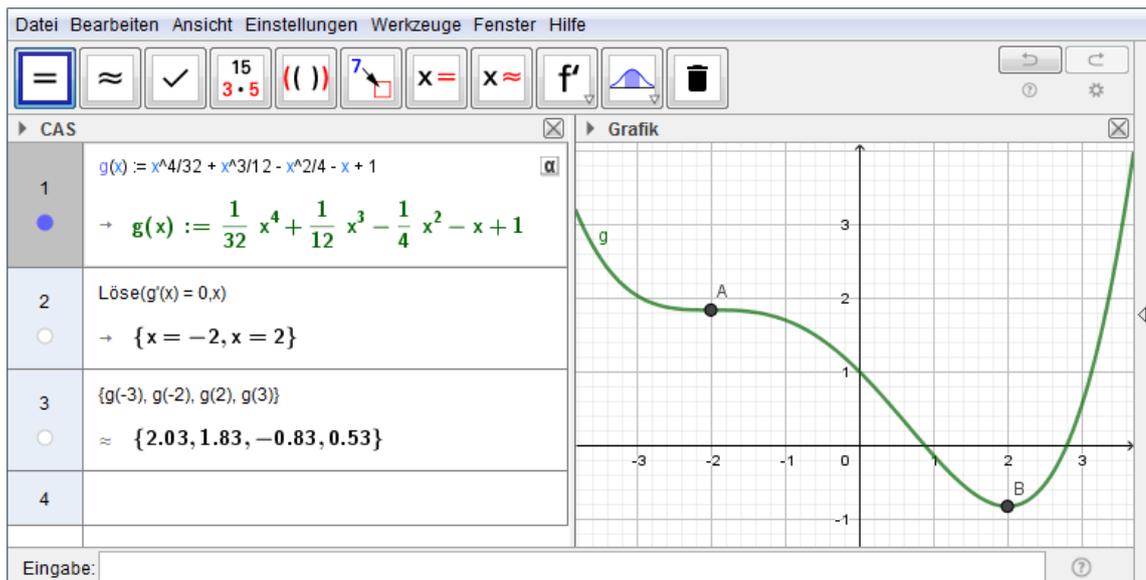


G 2.30



Die Überprüfung kann im CAS mit dem Befehl  $f'(x(P))$  (das wurde hier so gemacht) oder über die Eingabezeile mit dem Befehl  $f'(P)$  erfolgen.

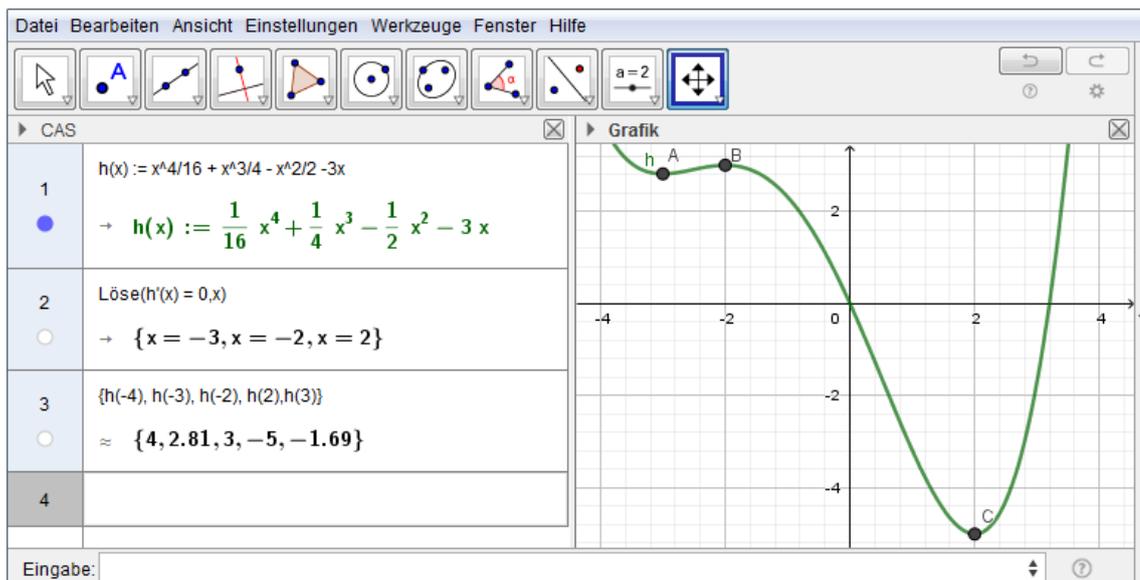
G 3.02



$g$  ist im Intervall  $(-\infty, 2]$  streng monoton fallend und im Intervall  $[2, \infty)$  streng monoton steigend. Zur Illustration sind im Grafikenster die Punkte  $A = (-2, g(-2))$  und  $B = (2, g(2))$  gezeichnet.

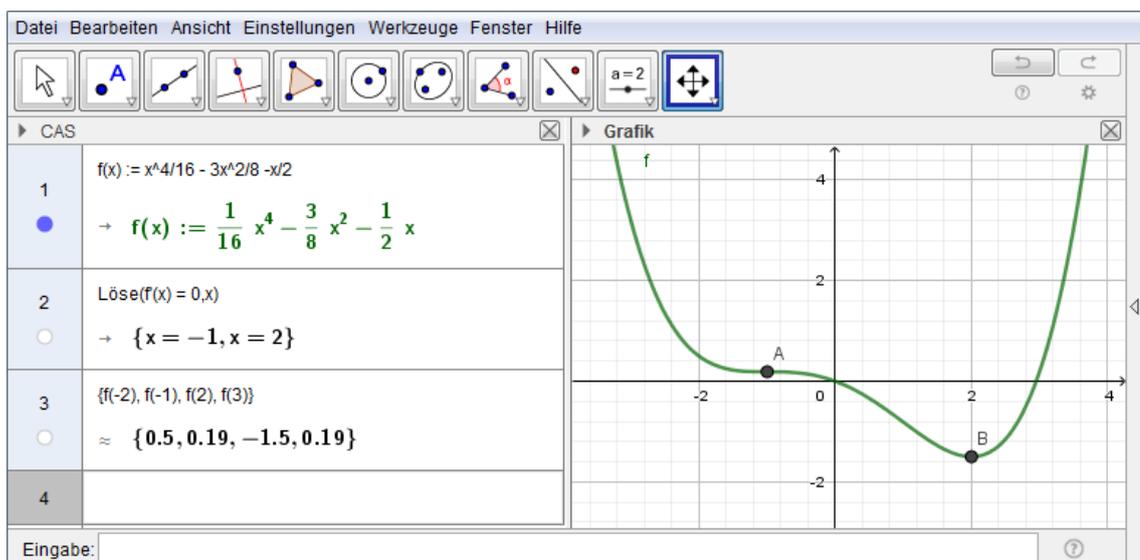


G 3.03



$h$  ist im Intervall  $(-\infty, -3)$  und im Intervall  $[-2, 2]$  streng monoton fallend und im Intervall  $[-3, -2]$  sowie im Intervall  $[2, \infty)$  streng monoton steigend. Zur Illustration sind im Grafikenster die Punkte  $A = (-3, h(-3))$ ,  $B = (-2, h(-2))$  und  $C = (2, h(2))$  gezeichnet.

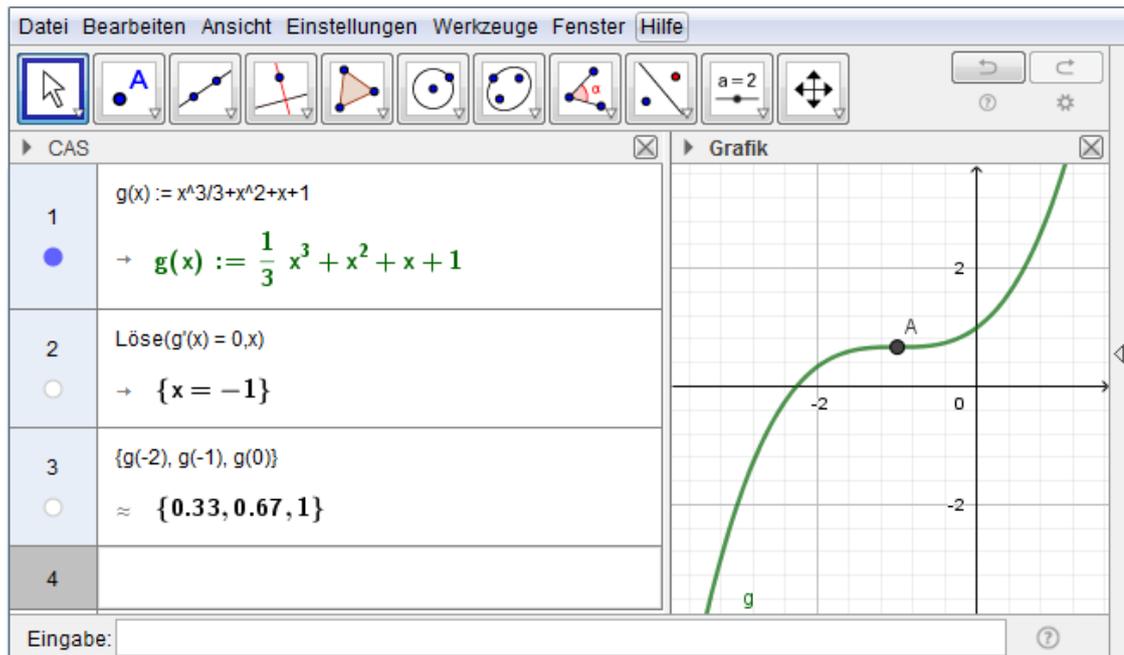
G 3.04



$f$  ist im Intervall  $(-\infty, 2]$  streng monoton fallend und im Intervall  $[2, \infty)$  streng monoton steigend. Zur Illustration sind im Grafikenster die Punkte  $A = (-1, f(-1))$  und  $B = (2, f(2))$  gezeichnet.  $-1$  ist eine Terrassenstelle (A ist Sattelpunkt) und  $2$  ist eine lokale Minimumstelle (B ist Tiefpunkt) von  $f$ .

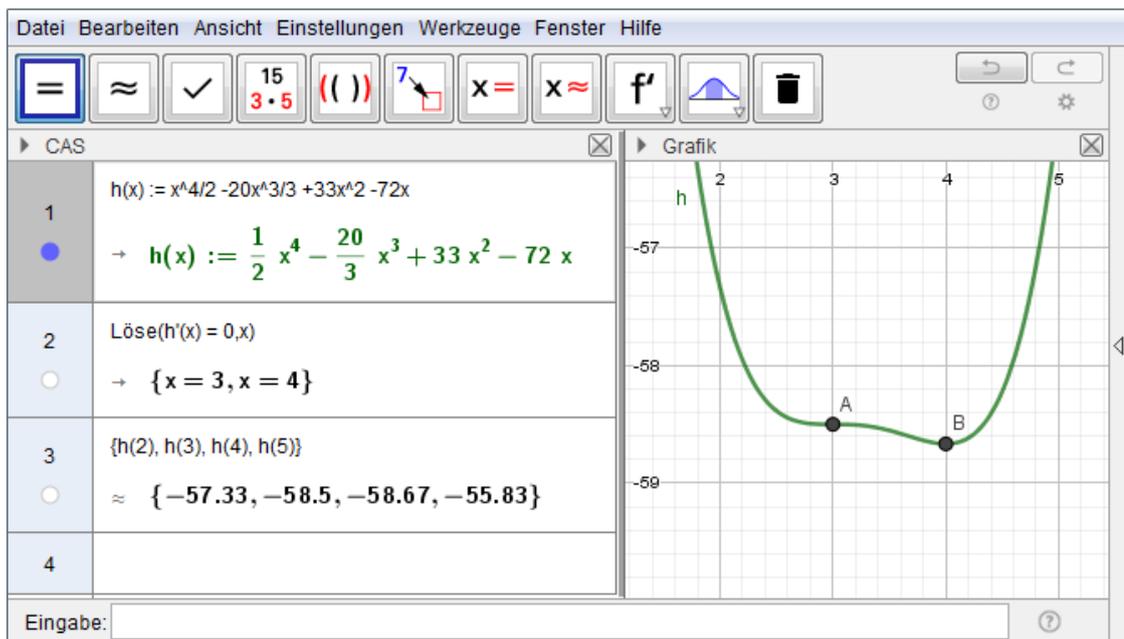


G 3.05



$g$  ist überall streng monoton steigend. Zur Illustration ist im Grafikenster der Punkt  $A = (-1, f(-1))$  gezeichnet.  $-1$  ist eine Terrassenstelle ( $A$  ist Sattelpunkt).  $g$  besitzt keine lokalen Extrema.

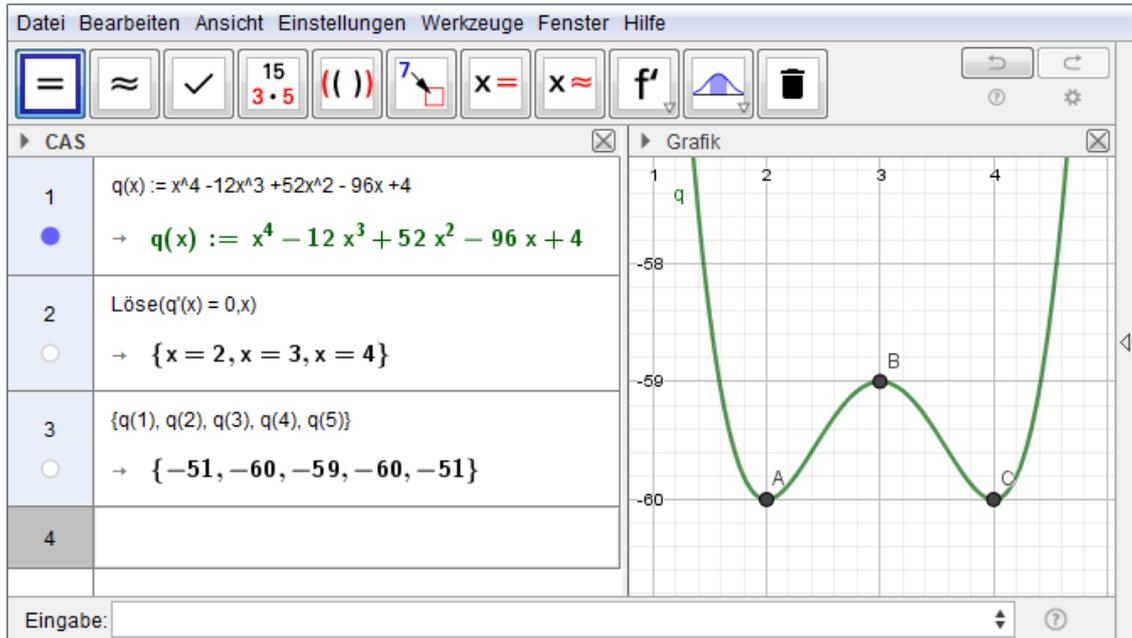
G 3.06



$h$  ist im Intervall  $(-\infty, 4]$  streng monoton fallend und im Intervall  $[4, \infty)$  streng monoton steigend. Zur Illustration sind im Grafikenster die Punkte  $A = (3, h(3))$  und  $B = (4, h(4))$  gezeichnet.  $3$  ist eine Terrassenstelle ( $A$  ist Sattelpunkt) und  $4$  ist eine lokale Minimumstelle ( $B$  ist Tiefpunkt) von  $h$ .

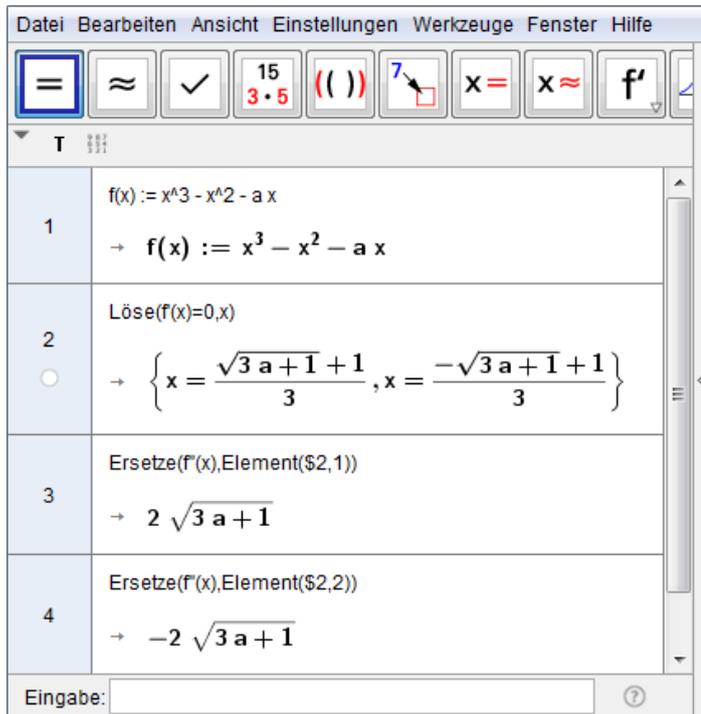


G 3.07



$q$  ist im Intervall  $(-\infty, 2]$  und im Intervall  $[3, 4]$  streng monoton fallend und im Intervall  $[2, 3]$  sowie im Intervall  $[4, \infty)$  streng monoton steigend. Zur Illustration sind im Grafikfenster die Punkte  $A = (2, q(2))$ ,  $B = (3, q(3))$  und  $C = (4, q(4))$  gezeichnet. 2 und 4 sind lokale Minimumstellen (A und C sind Tiefpunkte), 3 ist eine lokale Maximumstelle (B ist Hochpunkt).  $q$  besitzt keine Terrassenstelle.

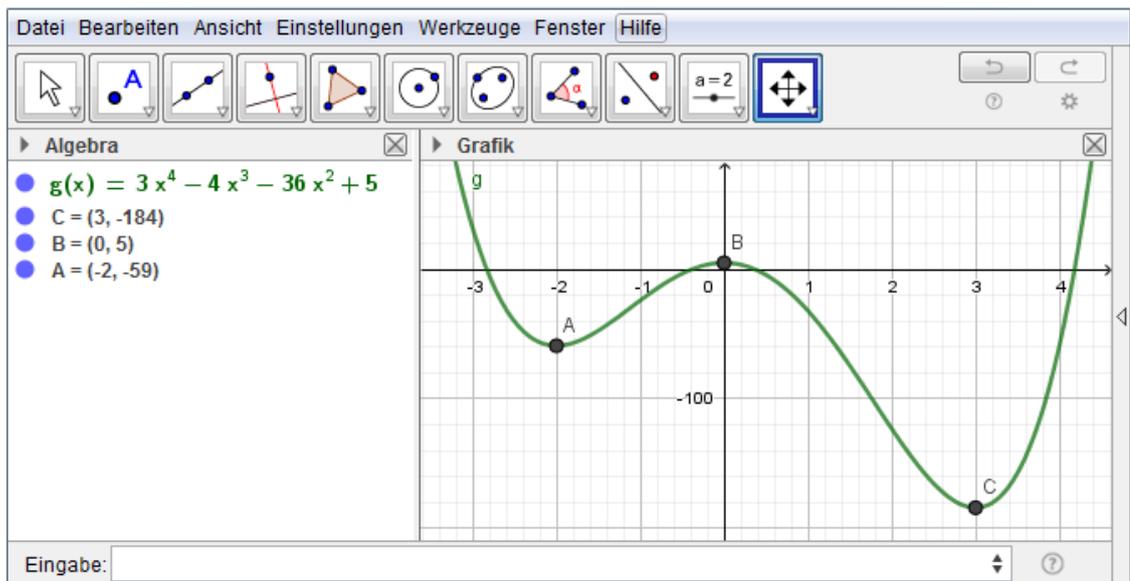
G 3.08



Eine Polynomfunktion vom Grad 3 besitzt entweder zwei lokale Extremstellen (eine lokale Minimum- und eine lokale Maximumstelle) oder eine Terrassenstelle oder weder noch. Für  $a > -\frac{1}{3}$  hat  $f'$  zwei Nullstellen, daher besitzt  $f$  in diesem Fall zwei Extremstellen. Für  $a = -\frac{1}{3}$  hat  $f'$  nur eine Nullstelle (die beiden im CAS angezeigten Werte für  $x$  fallen zusammen), daher besitzt  $f$  in diesem Fall eine Terrassenstelle. Für  $a < -\frac{1}{3}$  hat  $f'$  keine Nullstelle, daher besitzt  $f$  in diesem Fall weder lokale Extremstellen noch eine Terrassenstelle. (Wer's nicht glaubt, kann diesen Befund mit Hilfe eines Schiebereglers überprüfen. Soll das im gleichen GeoGebra-Arbeitsblatt geschehen, nennt man die Schieberegler-Variable beispielsweise  $a_1$ , da der Name  $a$  schon besetzt ist, und betrachtet den Graphen der Funktion  $f_1$  mit  $f_1(x) = x^3 - x^2 - a_1 x$ .)

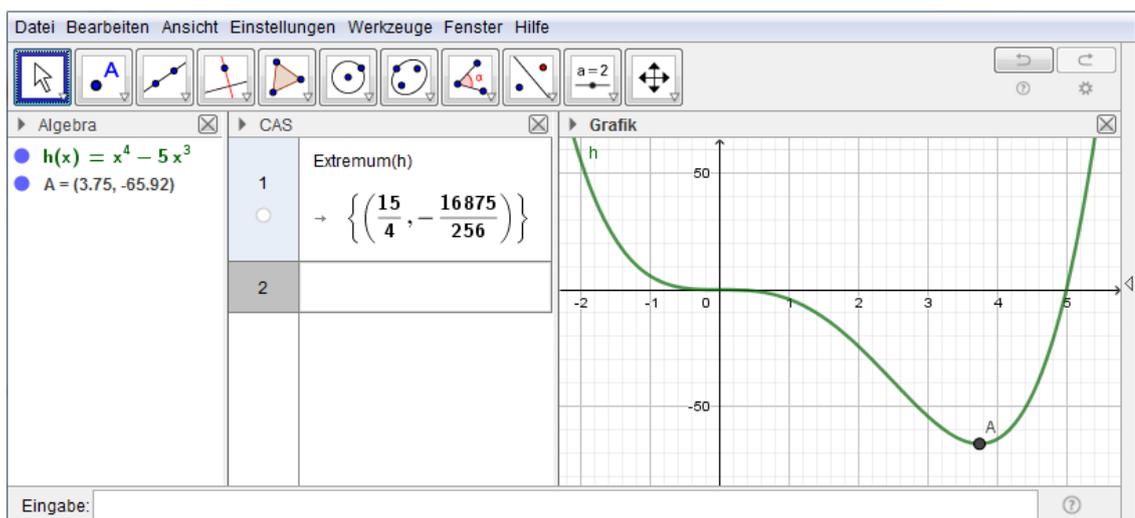


G 3.10



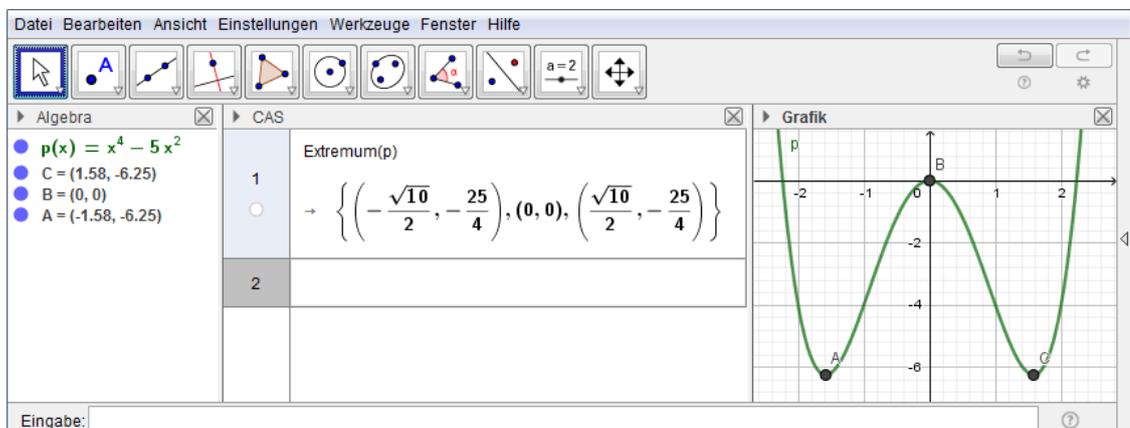
Die Berechnung wurde hier über die Eingabezeile vorgenommen. Um sicherzugehen, dass die angezeigten Punktkoordinaten exakt sind, kann sie zur Kontrolle auch im CAS durchgeführt werden.

G 3.11



Die Berechnung wurde hier auch im CAS durchgeführt, um den exakten Wert der (einzigen) Extremstelle zu erhalten.

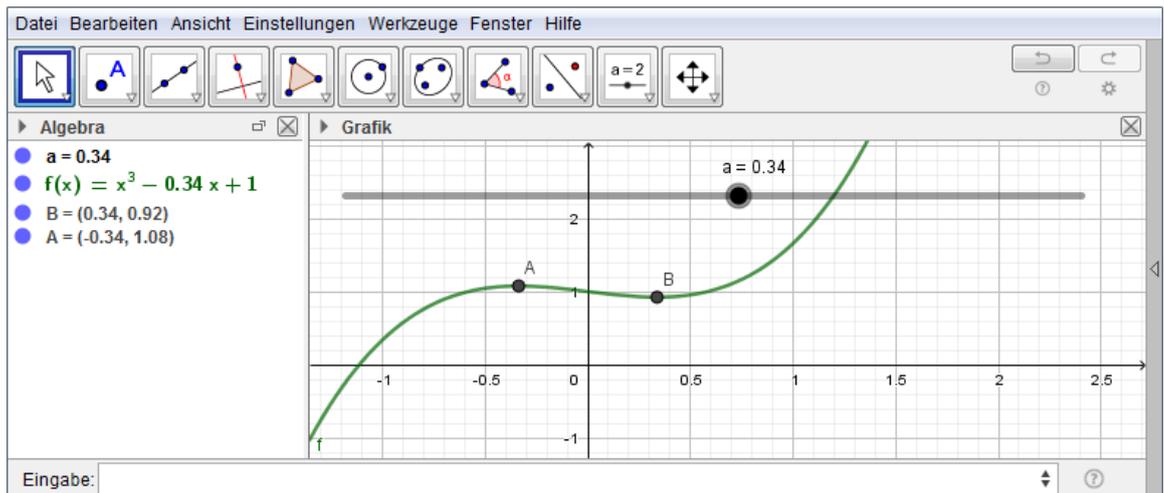
G 3.12



Die Berechnung wurde hier auch im CAS durchgeführt, um die exakten Werte der lokalen Extremstellen zu erhalten.

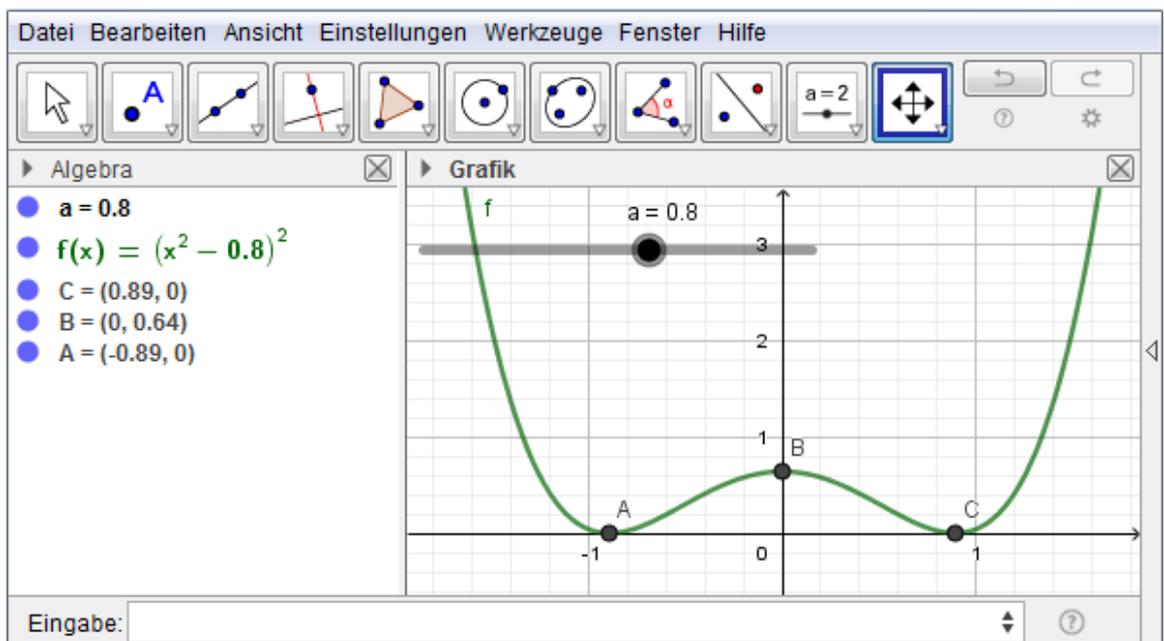


G 3.13



Für  $a > 0$  zeigt GeoGebra einen Hochpunkt (A) und einen Tiefpunkt (B) an. Für  $a = 0$  fallen diese beiden Punkte zusammen, es handelt sich dann um einen Sattelpunkt. Für  $a < 0$  gibt es weder lokale Extrema noch einen Sattelpunkt.

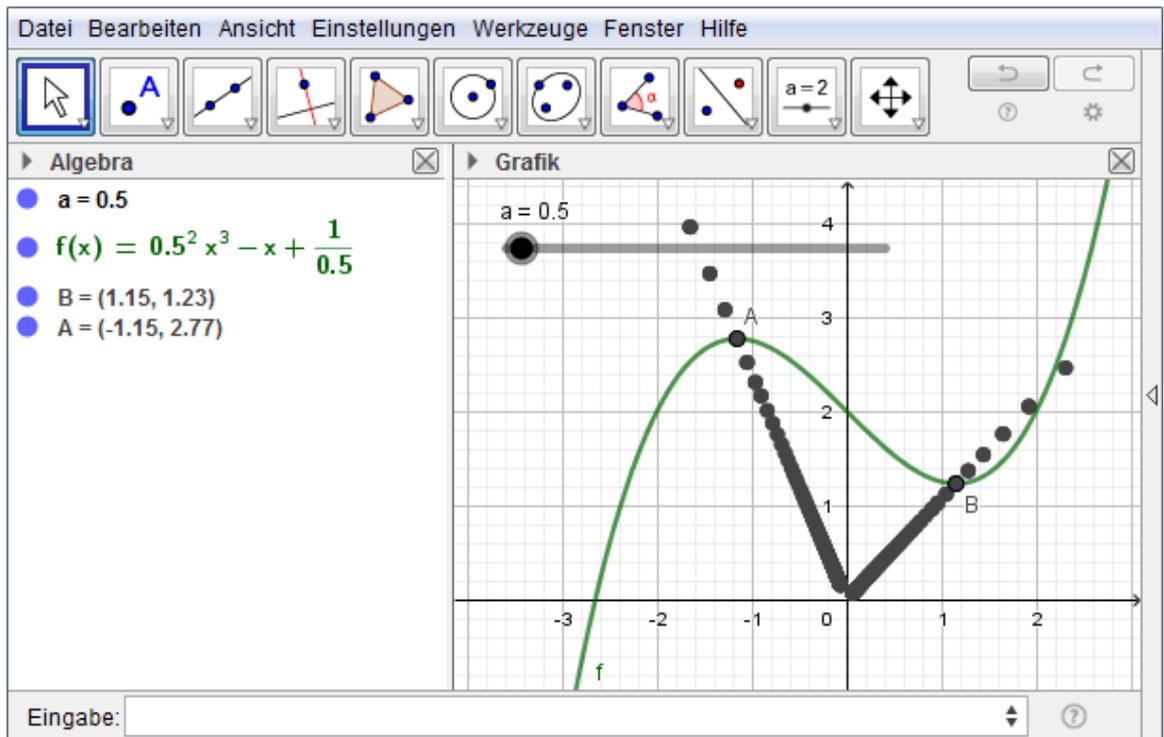
G 3.14



Für  $a > 1$  zeigt GeoGebra zwei Tiefpunkte (A und C), mit x-Koordinaten  $\pm\sqrt{a}$  (was man ohne Computerunterstützung mit freiem Auge sieht, denn nur dort sind die Funktionswerte gleich 0) und einen Hochpunkt (B) mit x-Koordinate 0 an. Für  $a = 0$  fallen diese drei Punkte zusammen, es handelt sich dann um einen Tiefpunkt. Auch für  $a < 0$  gibt es nur einen Tiefpunkt.

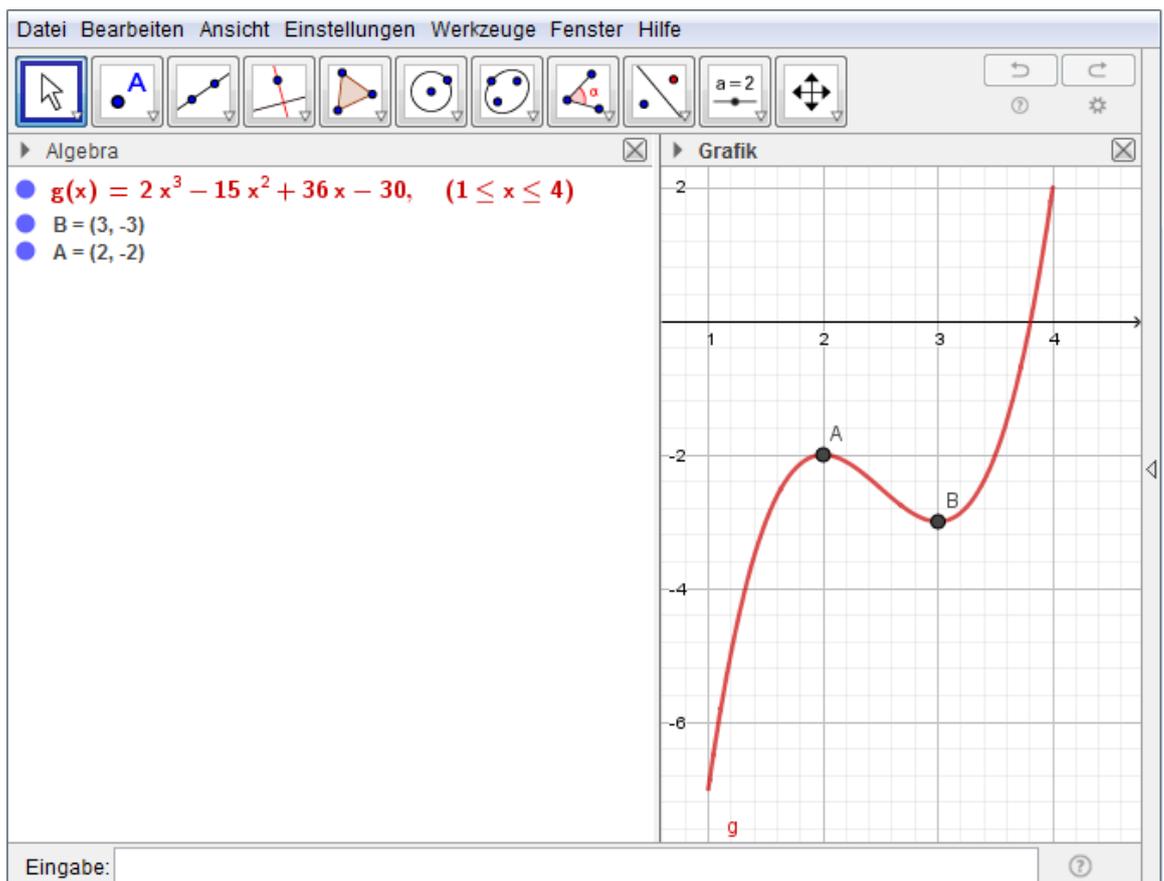


G 3.15

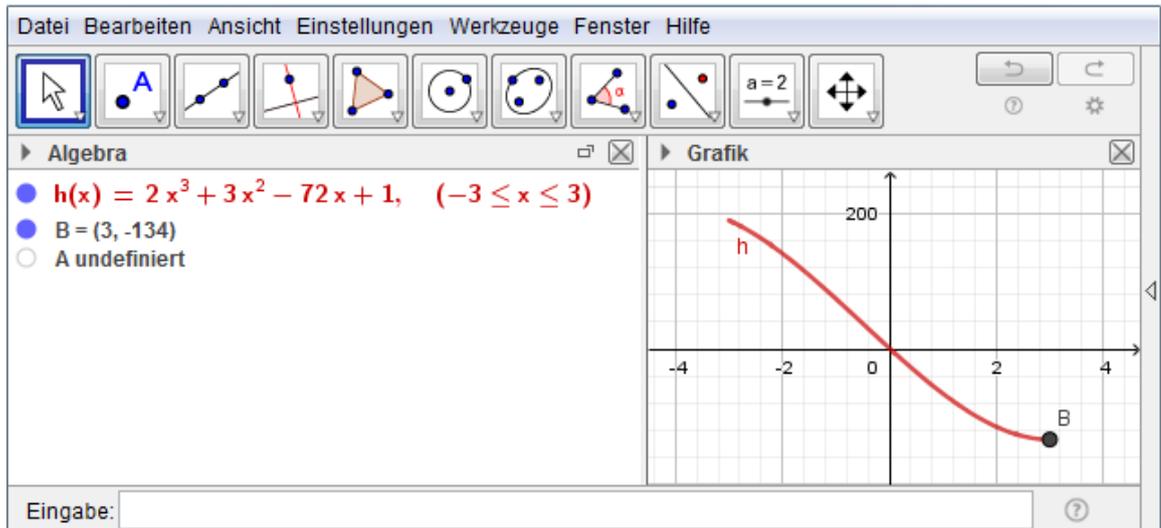


Die Erklärung für das Verhalten der Extrempunkte bei Änderung von  $a$  ist im Text angegeben.

G 3.17

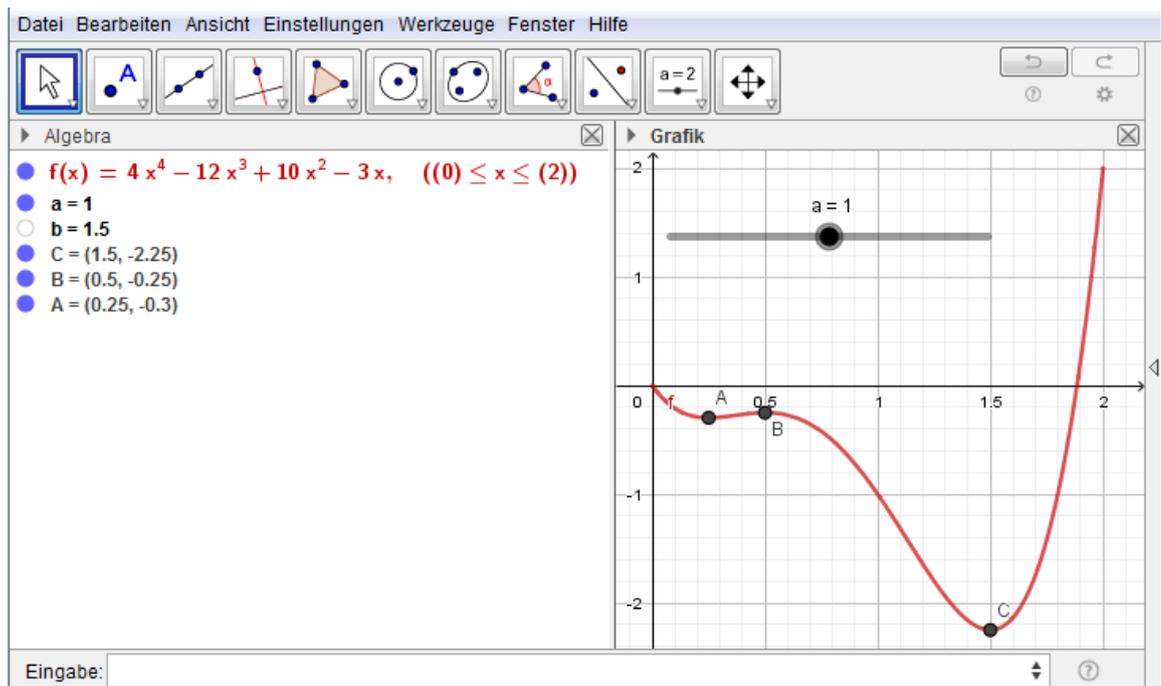


G 3.18



Dass GeoGebra einen Punkt A als „undefiniert“ anzeigt, deutet darauf hin, dass die für alle reellen Zahlen definierte Hilfsfunktion  $h_1$  mit  $h_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 1$  eine Extremstelle besitzt, die nicht im Intervall  $[-3, 3]$  liegt und daher für die Aufgabe irrelevant ist. Der von GeoGebra angezeigte Punkt B ist ein Tiefpunkt von  $h_1$ , seine x-Koordinate 3 ist eine lokale Minimumstelle von  $h_1$ . Da 3 am Rand des Definitionsintervalls von  $h$  liegt, handelt es sich bei der Stelle 3 um eine Randminimumstelle von  $h$ , also *nicht* um eine lokale Minimumstelle von  $h$ .

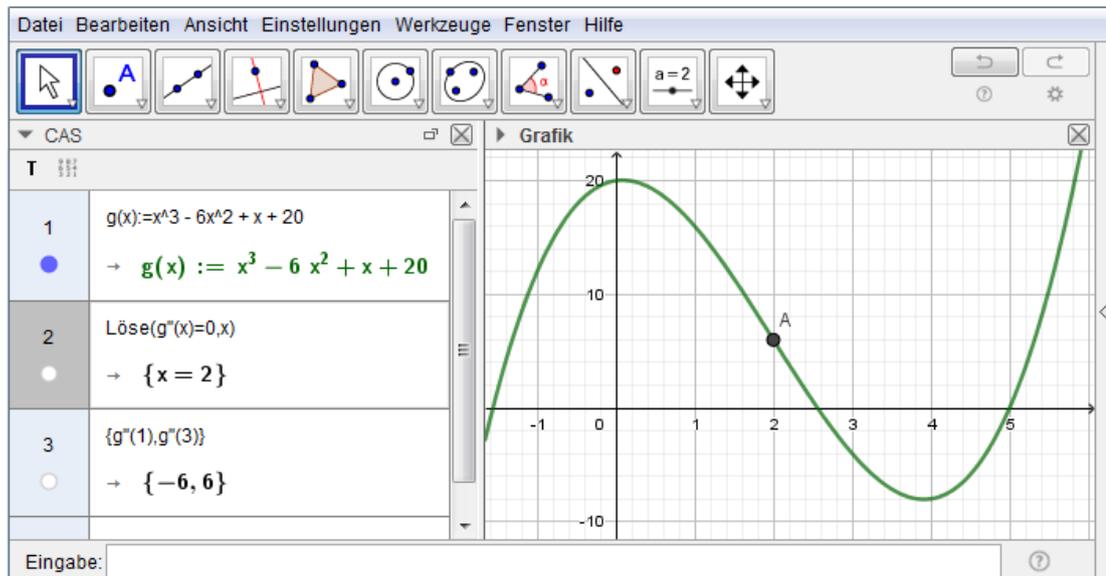
G 3.19



Dass Ergebnis der Minimierung führt auf die Anzeige  $b = 1.5$  im Algebra-Fenster. Der Befehl Extremum(f) erzeugt die Punkte A, B und C, von denen nur C (mit x-Koordinate 1.5) zu einer globalen Minimumstelle gehört.

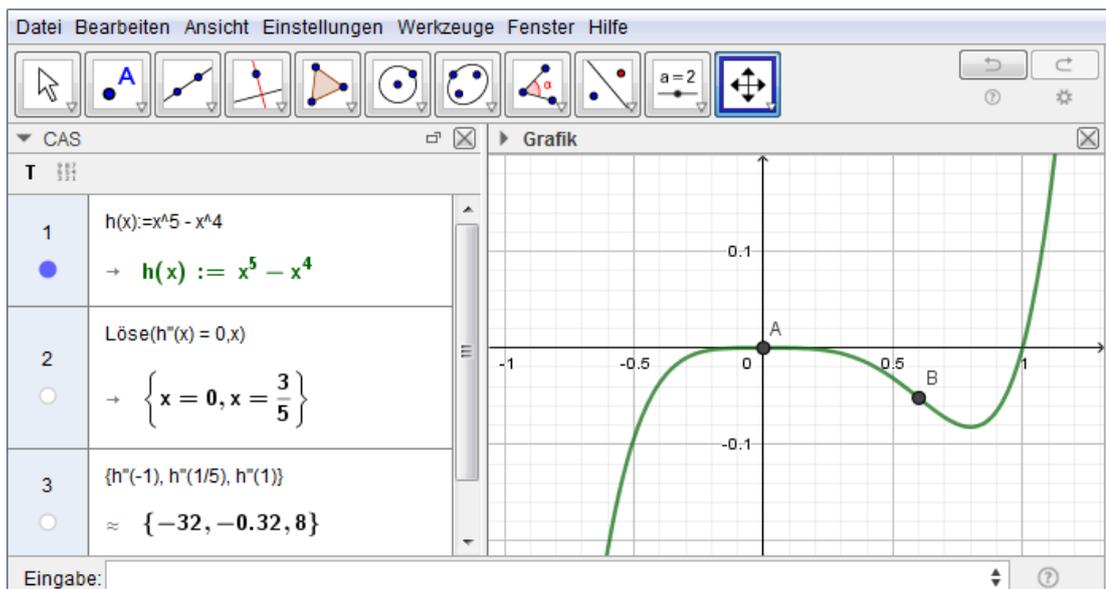


G 3.21



Zur Illustration ist im Grafikenster der Punkt  $A = (2, g(2))$  gezeichnet. 2 ist eine Wendestelle (A ist ein Wendepunkt) von  $g$ .  $g$  ist im Intervall  $(-\infty, 2]$  rechtsgekrümmt und im Intervall  $[2, \infty)$  linksgekrümmt.

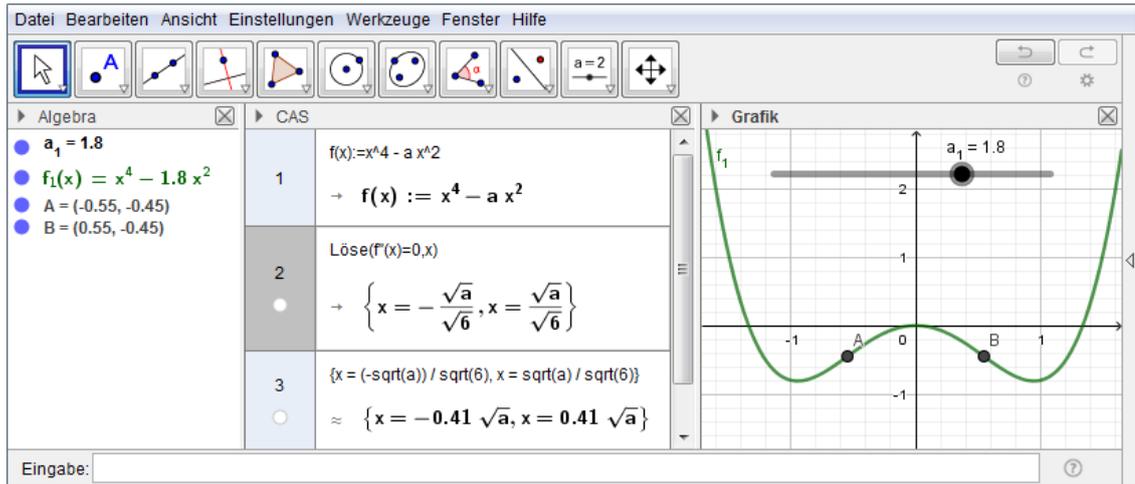
G 3.22



Zur Illustration sind im Grafikenster die Punkte  $A = (0, h(0))$  und  $B = (\frac{3}{5}, g(\frac{3}{5}))$  gezeichnet. Da bei der Stelle 0 kein Vorzeichenwechsel von  $f''$  stattfindet, ist  $\frac{3}{5}$  die einzige Wendestelle (B der einzige Wendepunkt) von  $h$ .  $h$  ist im Intervall  $(-\infty, \frac{3}{5})$  rechtsgekrümmt und im Intervall  $[\frac{3}{5}, \infty)$  linksgekrümmt.

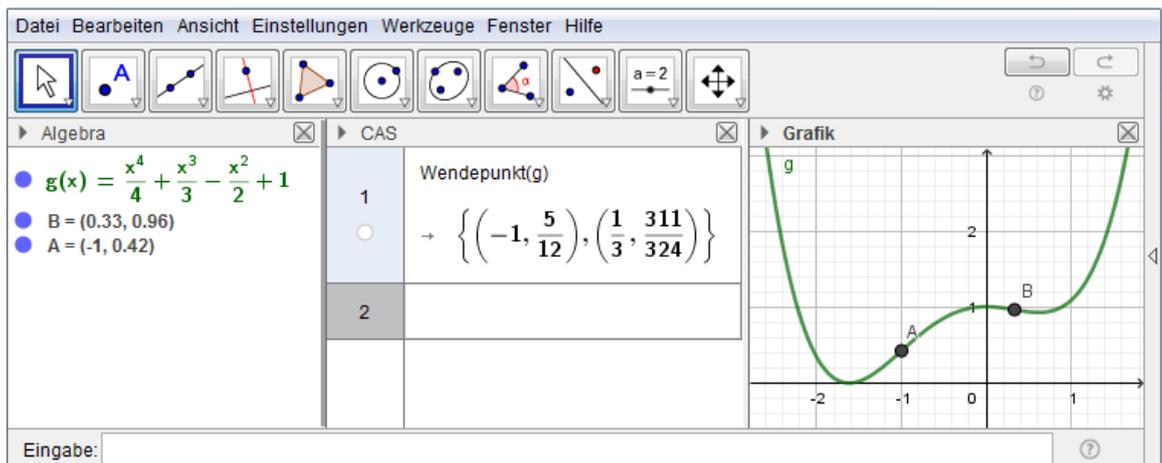


G 3.24



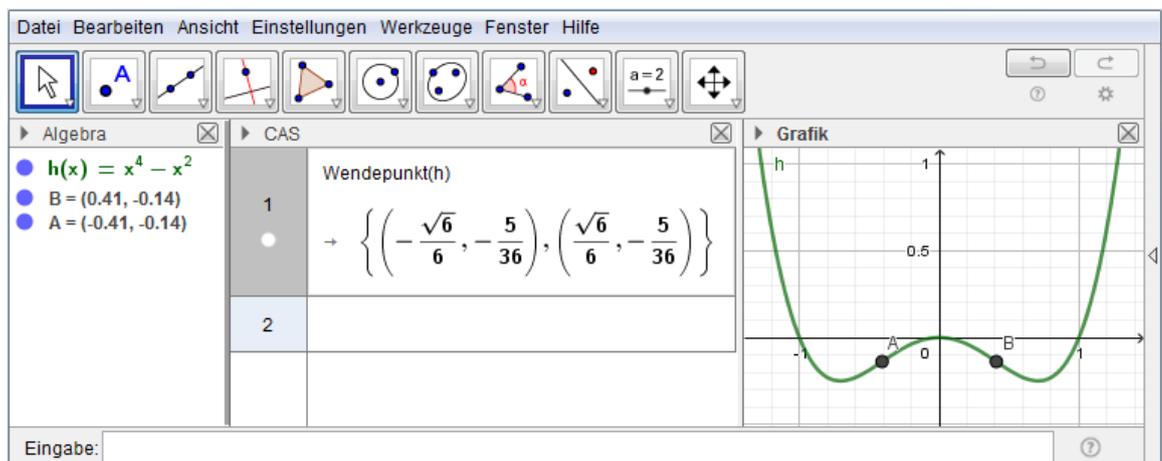
Zur Illustration sind im Grafikenster die Punkte  $A = \left(-\sqrt{\frac{a}{6}}, f\left(-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)\right)$  und  $B = \left(\sqrt{\frac{a}{6}}, f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)\right)$  gezeichnet. Für  $a > 0$  existieren sie und sind verschieden, in diesem Fall besitzt  $f$  zwei Wendestellen und ist daher nicht einheitlich gekrümmt. Ist  $a \leq 0$ , so fallen sie entweder zusammen (für  $a = 0$ ) oder existieren gar nicht (für  $a < 0$ ), in diesen Fällen ist  $f$  einheitlich (links)gekrümmt.

G 3.26



Die Berechnung wurde hier auch im CAS durchgeführt, um die exakten Koordinaten der Wendepunkte zu erhalten.

G 3.27



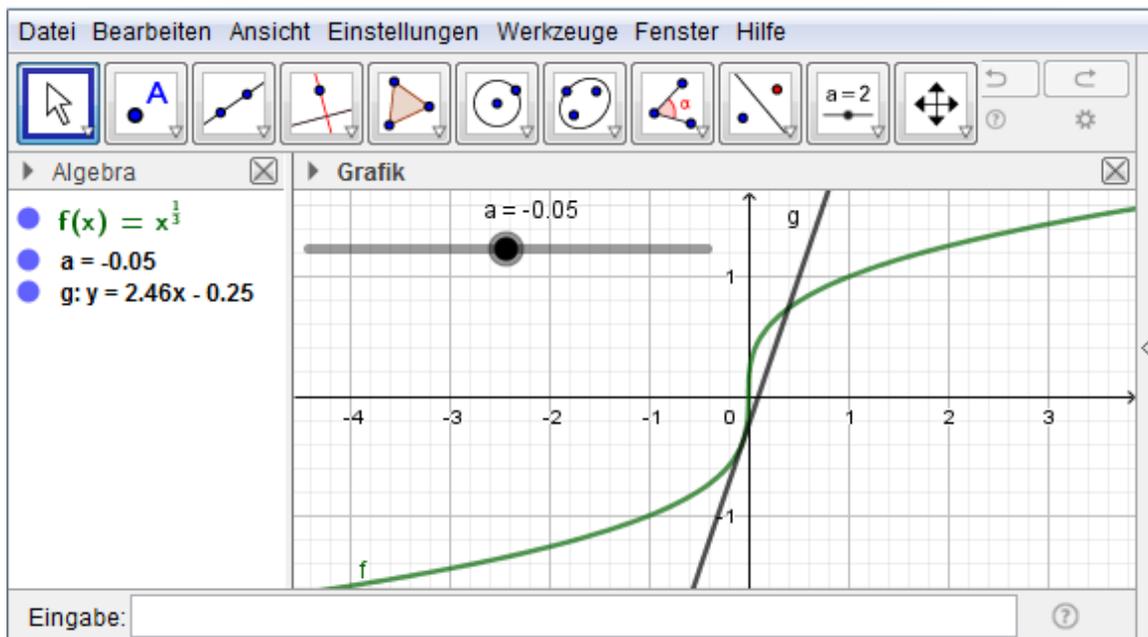
Die Berechnung wurde hier auch im CAS durchgeführt, um die exakten Koordinaten der Wendepunkte zu erhalten.

G 3.30

Es muss genauso vorgegangen werden wie in Aufgabe G 3.29 vorgeführt.

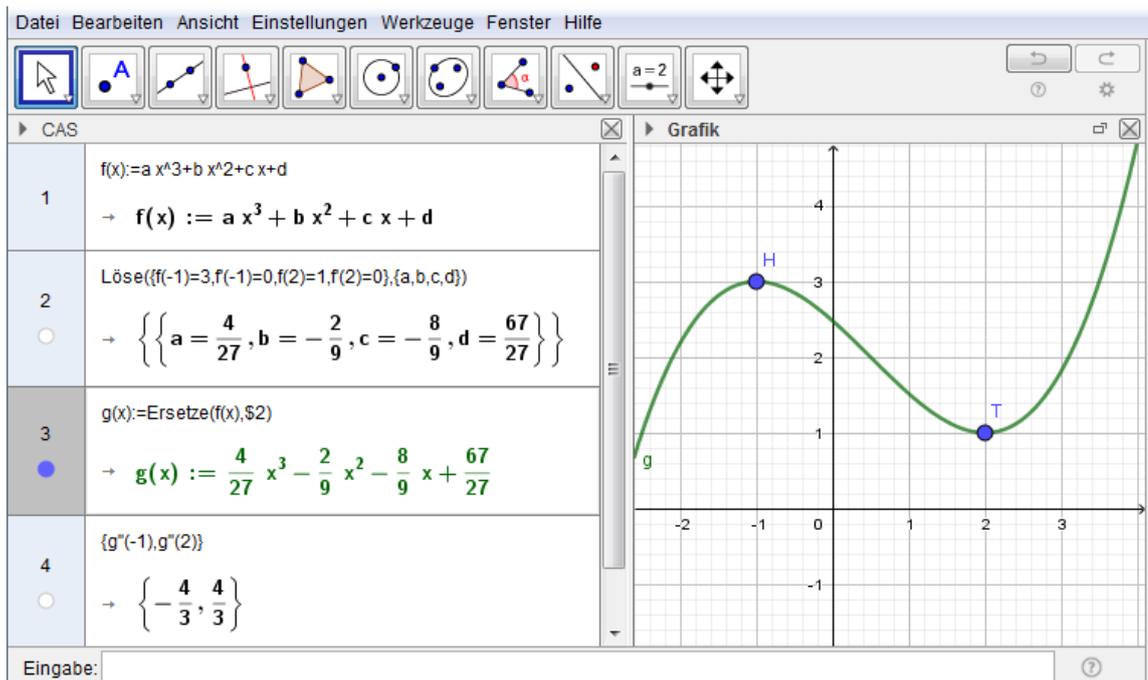


G 3.31



GeoGebra nimmt den Befehl Tangente(0, f) überhaupt nicht an. Geometrisch gesehen ist die Tangente an den Graphen im Punkt (0, 0) parallel zur zweiten Achse, hat also keine wohldefinierte Steigung. Daher ist  $f$  an der Stelle 0 nicht differenzierbar, und somit ist 0 keine Wendestelle. Je kleiner  $|a|$  ist, umso steiler ist die Tangente durch den Punkt  $(a, f(a))$ . Für  $a = 0$  wird sie nicht gezeichnet und im Algebrafenster als „undefiniert“ gekennzeichnet.

G 3.33



Zur Illustration sind im Grafikfenster die Punkte H und T gezeichnet.

G 3.34

Analog zu G3.33. Als Gleichung muss eingegeben werden: Löse( $\{f(1) = -2, f'(1) = 0, f(1) = -3, f(0) = -1\}, \{a, b, c, d\}$ ).

G 3.35

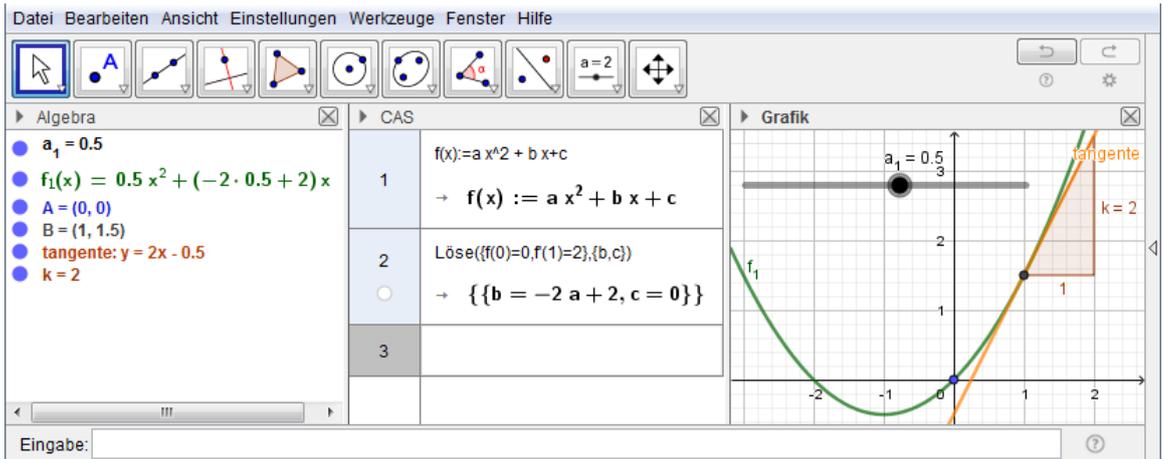
Analog zu G3.33. Als Gleichung muss eingegeben werden: Löse( $\{f(2) = 0, f'(2) = 1, f(1) = 0, f'(1) = 0\}, \{a, b, c, d\}$ ).

G 3.36

Analog zu G3.33. Der Funktionsansatz ist  $f(x) := a x^2 + b x + c$ . Als Gleichung gib ein: Löse( $\{f(2) = 0, f'(2) = 0, f'(1) = 1\}, \{a, b, c\}$ ).

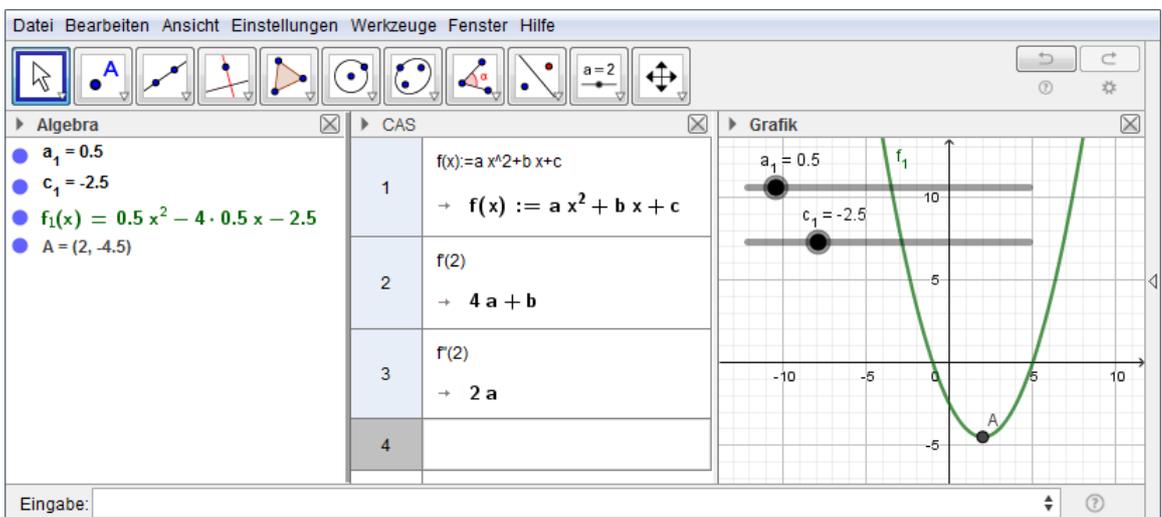


G 3.37



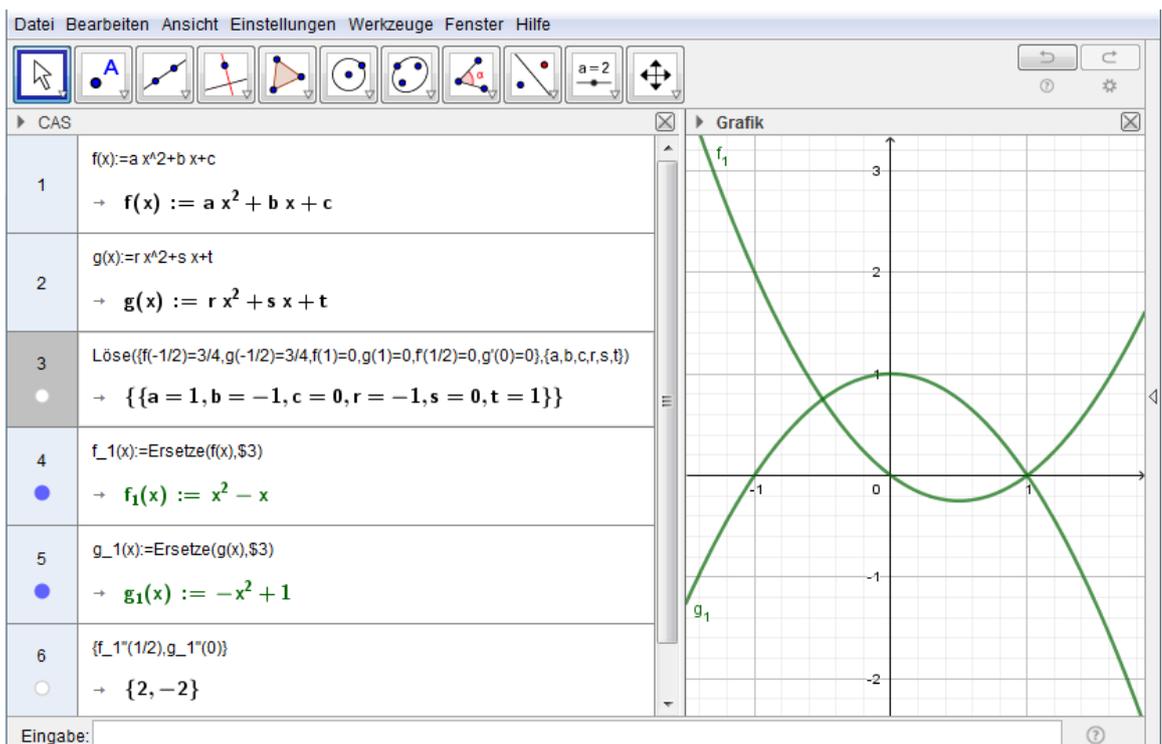
Lösung: Die Menge aller Funktionen der Form  $f(x) = a x^2 + 2(1 - a)x$  mit  $a \neq 0$ .

G 3.38



Es muss  $4a + b = 0$  (also  $b = -4a$ ), d.h.  $f(x) = a x^2 - 4a x + c$ , und  $a > 0$  sein.

G 3.39



G 3.40

File Edit View Settings Tools Window Help

$=$   $\approx$   $\checkmark$   $15$   $3.5$   $(( ))$   $7$   $x=$   $x\approx$   $f'$

**1**  $f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$   
 $\rightarrow f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$

**2**  $\text{L\u00f6se}(\{f(0)=f_0, f'(0)=f_1, f''(0)=f_2, f'''(0)=f_3\}, \{a, b, c, d\})$   
 $\rightarrow \left\{ \left\{ a = \frac{1}{6} f_3, b = \frac{1}{2} f_2, c = f_1, d = f_0 \right\} \right\}$

**3**  $g(x) := \text{Ersetze}(f(x), \$2)$   
 $\rightarrow g(x) := \frac{1}{6} f_3 x^3 + \frac{1}{2} f_2 x^2 + f_1 x + f_0$

Eingabe:

G 3.41

File Edit View Settings Tools Window Help

Algebra CAS Grafik

$f_1(t) = 3t - 9.81 \cdot \frac{t^2}{2}, \quad (0 \leq t \leq 2 \cdot \frac{3}{9.81})$   
 $f_2(t) = 6t - 9.81 \cdot \frac{t^2}{2}, \quad (0 \leq t \leq 2 \cdot \frac{3}{9.81})$

**1**  $h_1(t) := h_{0_1} + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$   
 $\rightarrow h_1(t) := -\frac{1}{2} g t^2 + t v_0 + h_0$

**2**  $h_2(t) := h_{0_2} + w_0 t - \frac{1}{2} g t^2$   
 $\rightarrow h_2(t) := -\frac{1}{2} g t^2 + t w_0 + h_0$

**3**  $\text{L\u00f6se}(h_1(t)=h_2(t))$   
 $\rightarrow \left\{ t = 2 \cdot \frac{v_0}{g}, t = 0 \right\}$

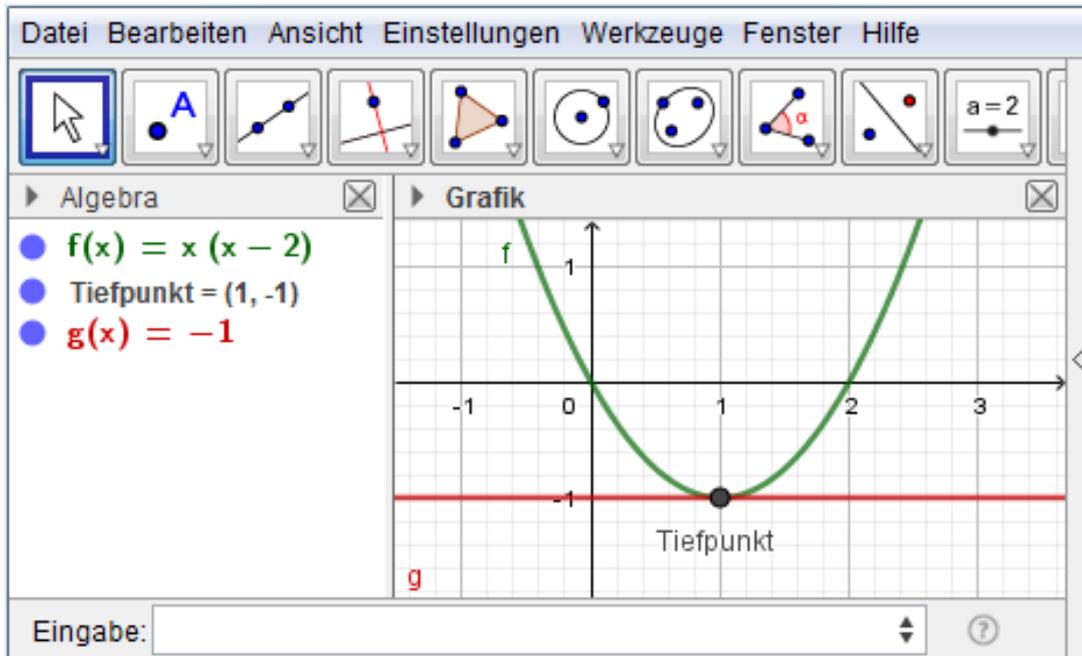
**4**  $h_2'(2v_0/g)$   
 $\rightarrow -2 v_0 + w_0$

Eingabe:

Ist  $w_0$  die gesuchte Geschwindigkeit, so muss  $-2v_0 + w_0 = 0$ , d.h.  $w_0 = 2v_0$  sein. Man muss den zweiten K\u00f6rper doppelt so schnell abschie\u00dfen als den ersten.

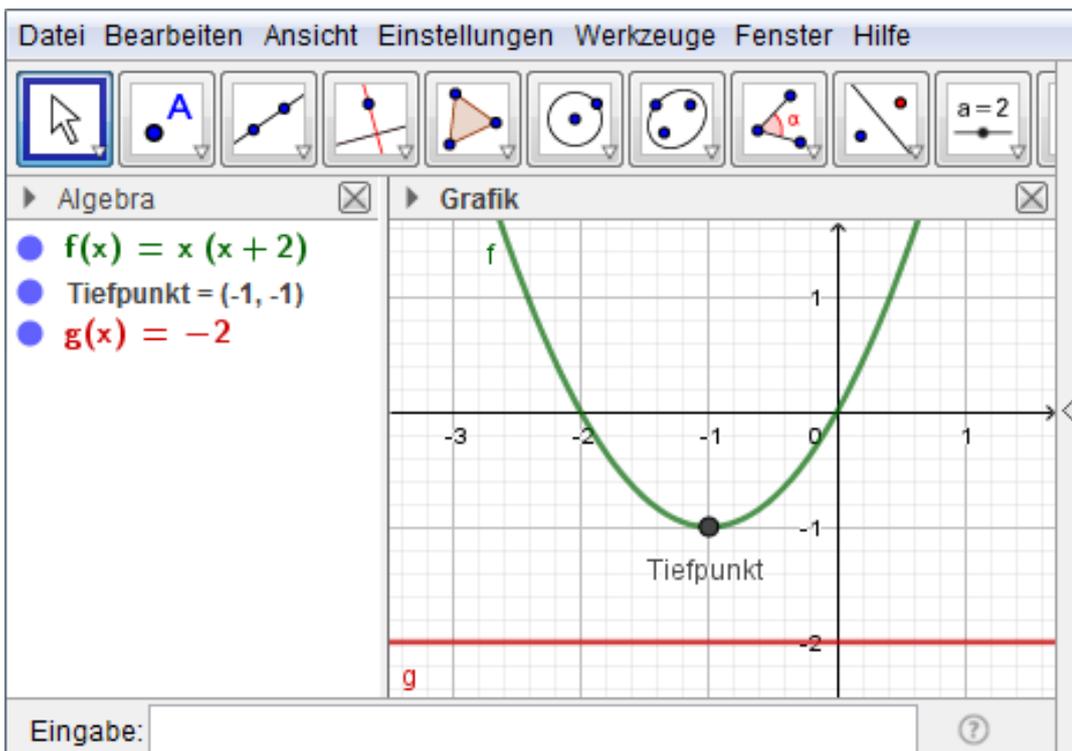


G 3.42



Der Tiefpunkt wurde mit dem Befehl „Extremum(f)“ erzeugt.

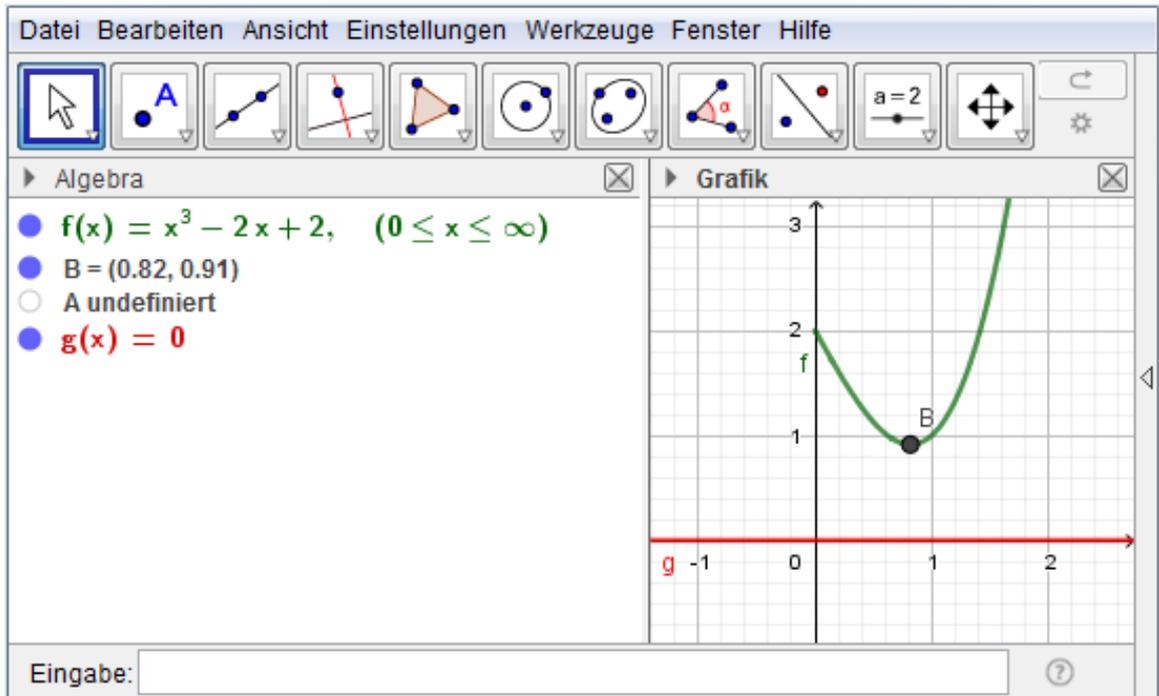
G 3.43



Der Tiefpunkt wurde mit dem Befehl „Extremum(f)“ erzeugt.



G 3.44

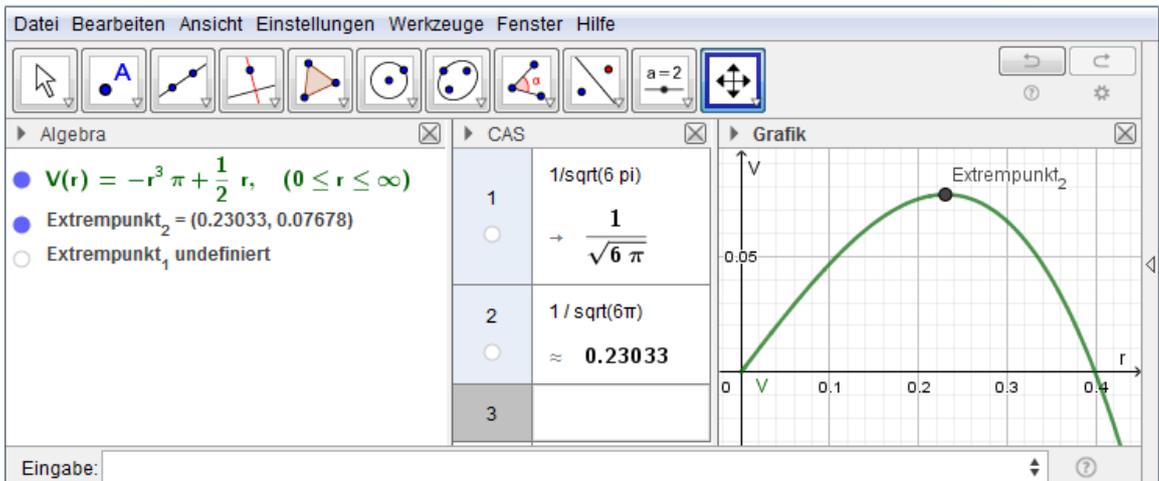


Der Punkt B wurde mit dem Befehl „Extremum(f)“ erzeugt.

G 3.45

Ein Blick auf den Screenshot zu Aufgabe G3.43 zeigt, dass  $c = -1$  ist.

G 3.47



G 3.48

File Edit View Settings Tools Window Help

= ≈ ✓ 15  
3 · 5 (( )) 7 ↶ ✖ ≈

T

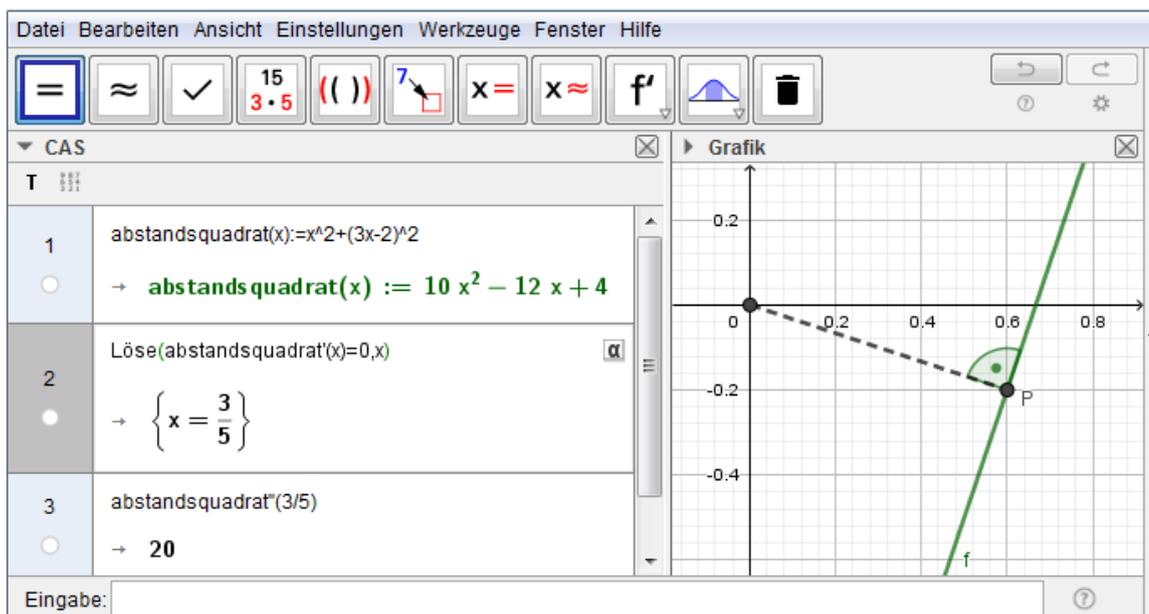
1	Löse[2a <sup>3</sup> -2+4a-11=-F,11]
○	→ $\left\{ h = \frac{F - 2 a^2}{4 a} \right\}$
2	V(a):=Ersetze(a <sup>2</sup> h,\$1)
→	$V(a) := -\frac{1}{2} a^3 + \frac{1}{4} F a$
3	Löse(V(a)=0,a) <span>α</span>
●	→ $\left\{ a = -\frac{\sqrt{F}}{\sqrt{6}}, a = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{6}} \right\}$
4	aLoesung:=Ersetze(a,Element(\$3,2))
→	$aLoesung := \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{6}}$
5	V'(aLoesung)
→	$-3 \cdot \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{6}}$
6	hLoesung:=Ersetze(Ersetze(h,\$1),a,\$4)
→	$hLoesung := \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{6}}$

Eingabe:  ?

Lösung: der Würfel! Überprüfe selbst anhand des Graphen der Zielfunktion!

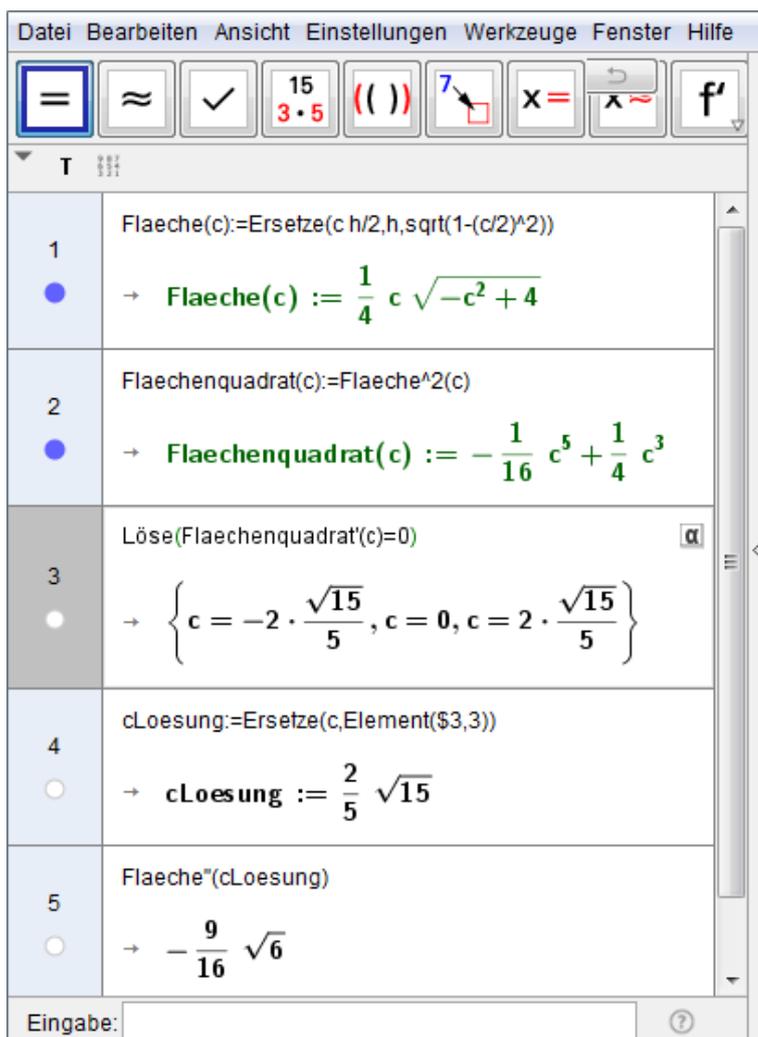


G 3.49



Der gesuchte Punkt ist  $P = \left(\frac{3}{5}, f\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ . Seine geometrische Bedeutung sollte klar sein – sie ist hier durch die strichlierte Strecke verdeutlicht. Überprüfe selbst anhand des Graphen der Zielfunktion!

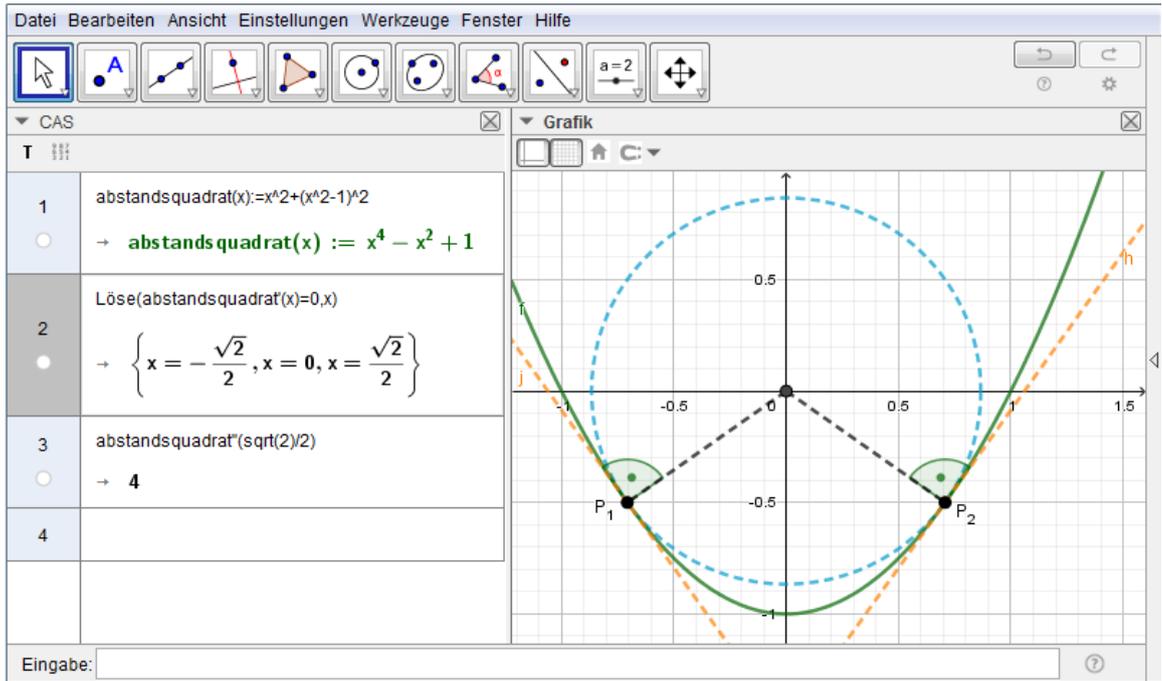
G 3.50



Überprüfe selbst anhand des Graphen der Zielfunktion!

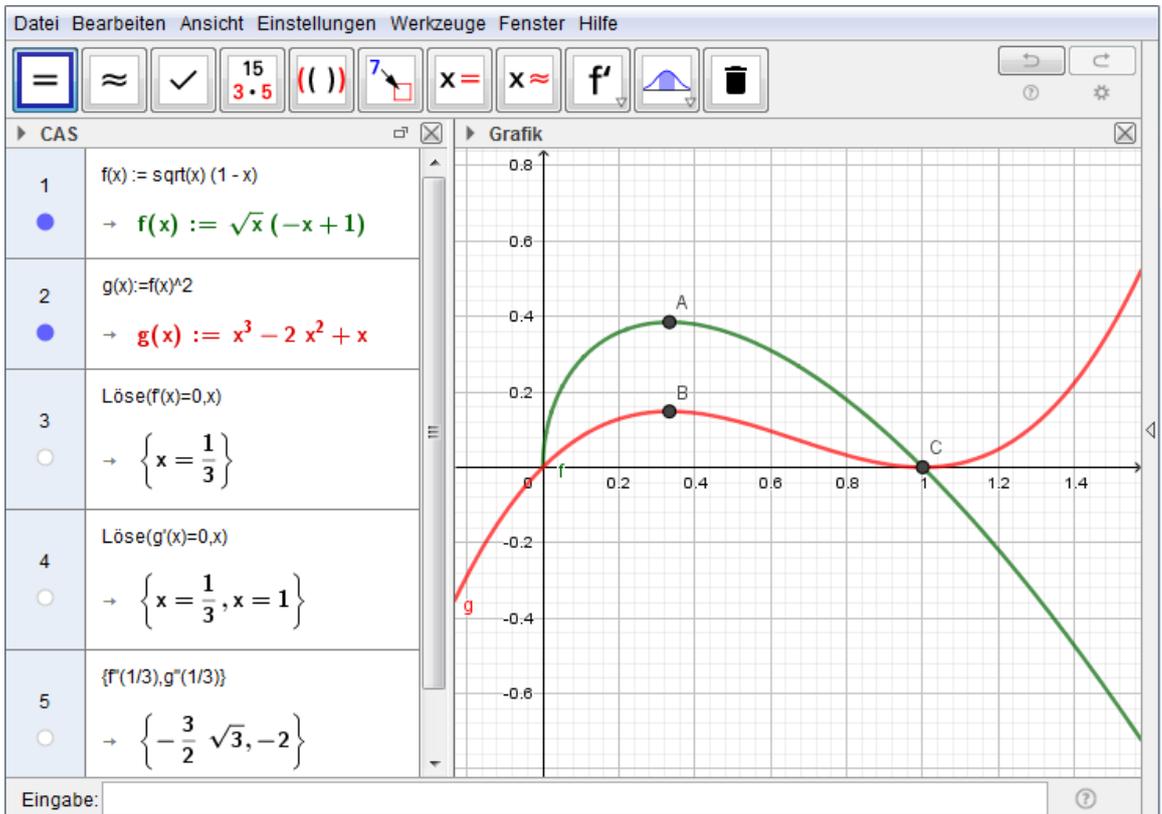


G 3.51



Es gibt zwei solche Punkte:  $P_{1,2} = \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) = \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ . Ihre geometrische Bedeutung sollte klar sein – sie ist hier durch einige strichlierte Linien verdeutlicht. Überprüfe selbst anhand des Graphen der Zielfunktion!

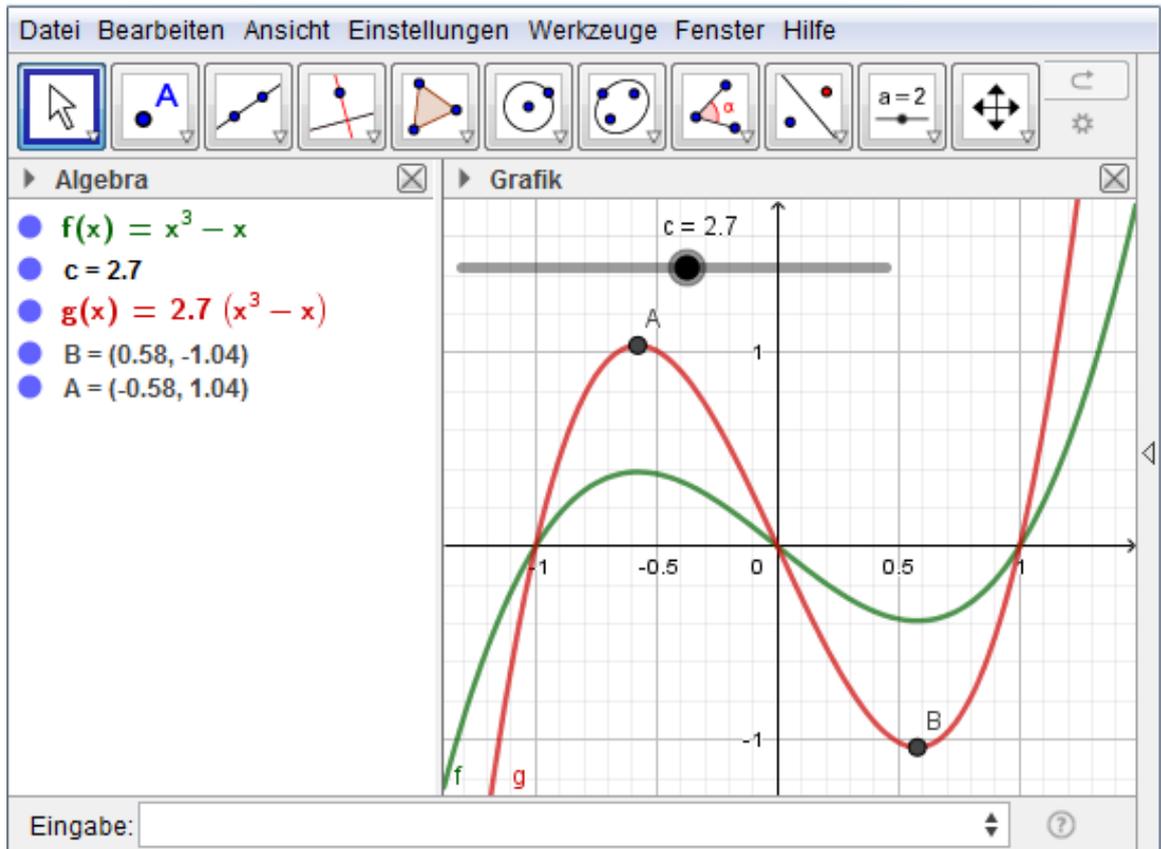
G 3.52



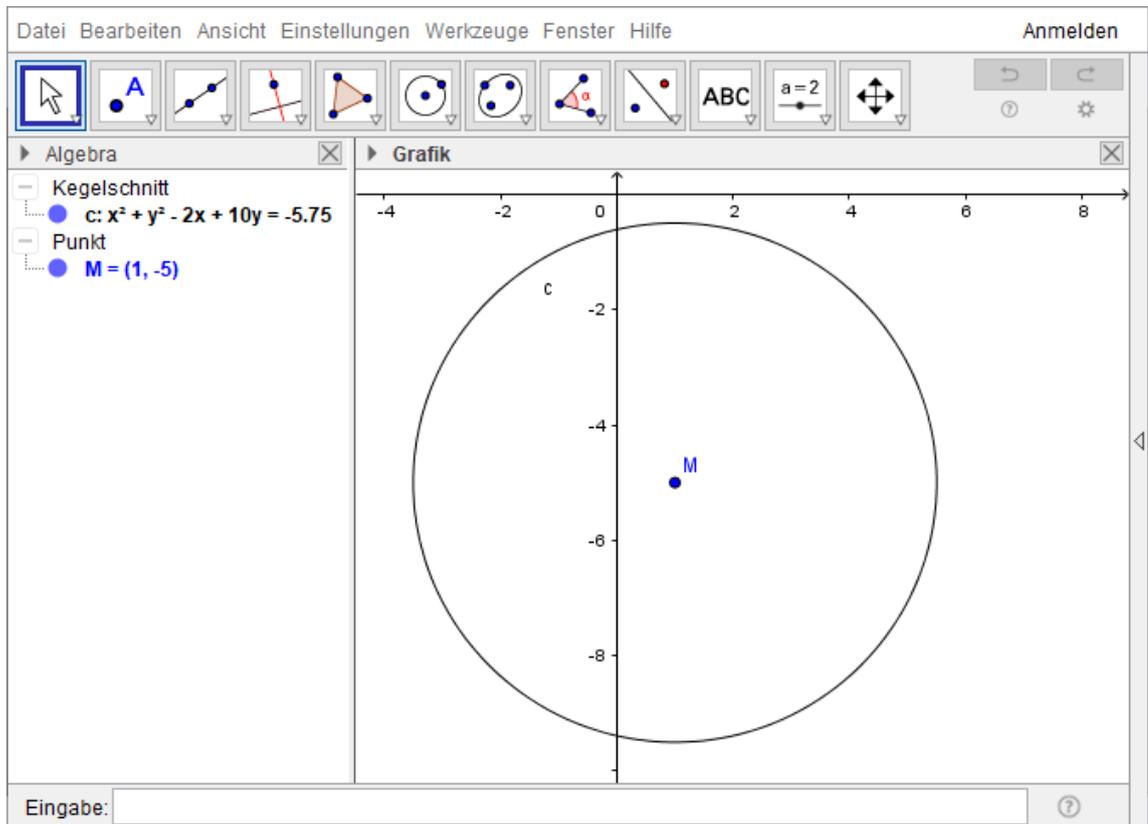
- a)  $f(x)$  ist negativ für  $x > 1$ ,  $g(x)$  ist positiv für  $x > 1$  und wächst unbegrenzt. Daher gehört A zu einem globalen Maximum von  $f$ , B aber nicht zu einem globalen, sondern nur zu einem lokalen Maximum von  $g$ .
- b)  $C = (1, 0)$  ist Tiefpunkt von  $g$ , aber wegen  $f'(1) \neq 0$  ist C kein Tiefpunkt von  $f$ .



G 3.53

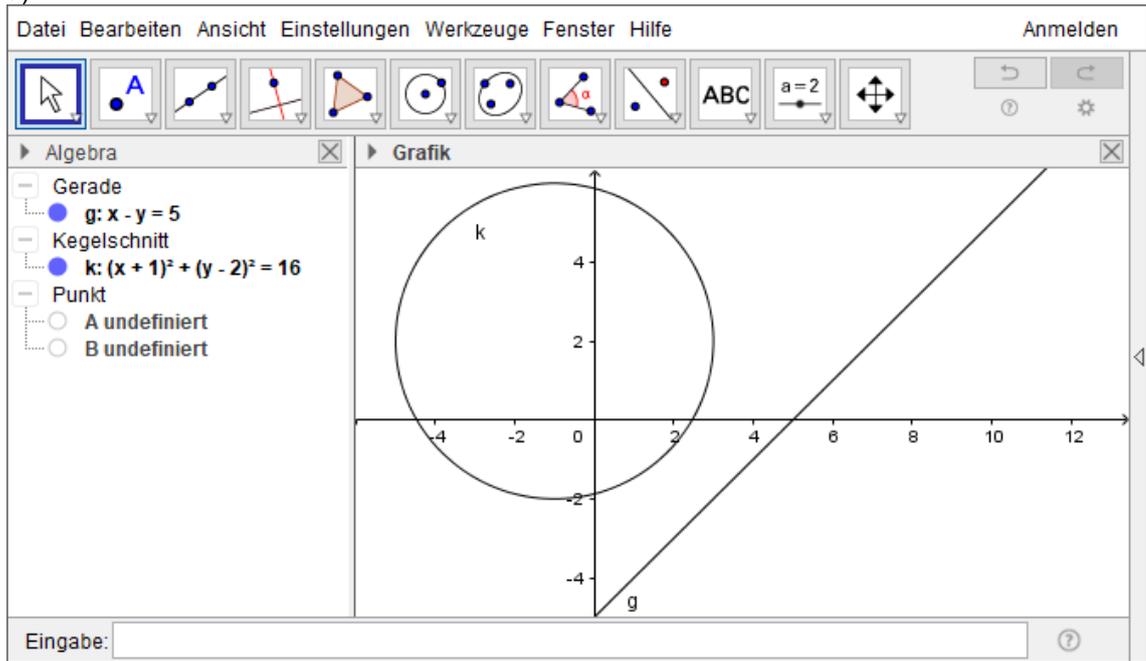


G 4.03



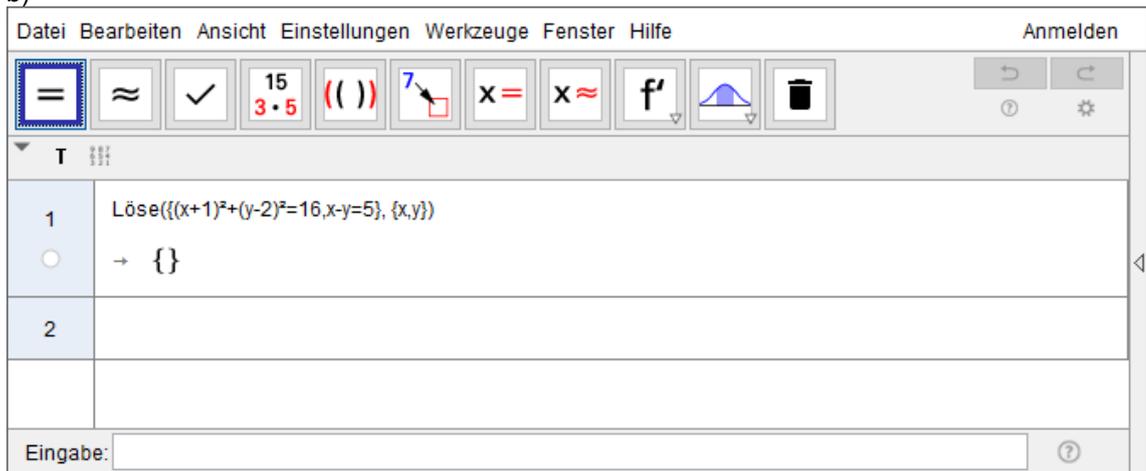
G 4.05

a)



Da  $g$  mit  $k$  keinen Punkt gemeinsam hat, ist  $g$  eine Passante von  $k$

b)



Das Gleichungssystem hat keine Lösung, d. h.  $g$  hat mit  $k$  keinen Punkt gemeinsam und ist daher eine Passante von  $k$ .



G 4.10

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe Anmelden

**Algebra**

- Ebene
  - b:  $0.41x + 0.82y + 0.41z = -0.55$
  - c:  $0.41x + 0.82y + 0.41z = 5.45$
- Gerade
  - f:  $X = (1, 0, 5) + \lambda(1, 2, 1)$
- Kugel
  - a:  $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 9$
- Punkt
  - A = (-0.22, -2.45, 3.78)
  - B = (2.22, 2.45, 6.22)
  - M = (1, 0, 5)

**3D Grafik**

Eingabe:

G 5.06

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe Anmelden

**Algebra**

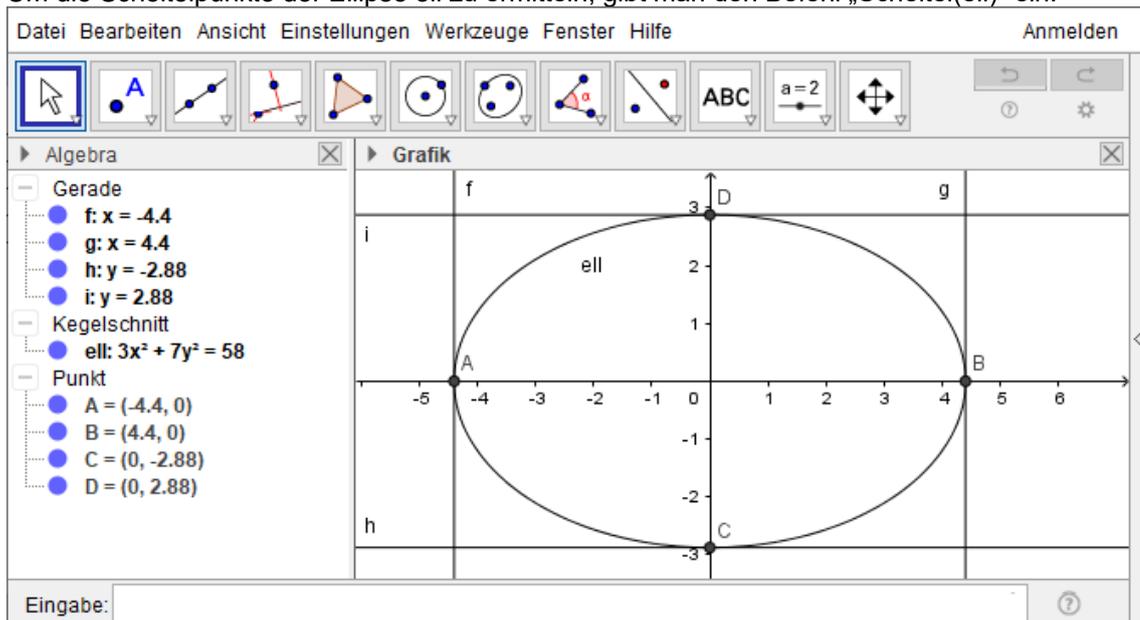
- Gerade
  - t:  $x + y = 8$
- Kegelschnitt
  - ell:  $3x^2 + 5y^2 = 120$
- Punkt
  - Q = (5, 3)

**Grafik**

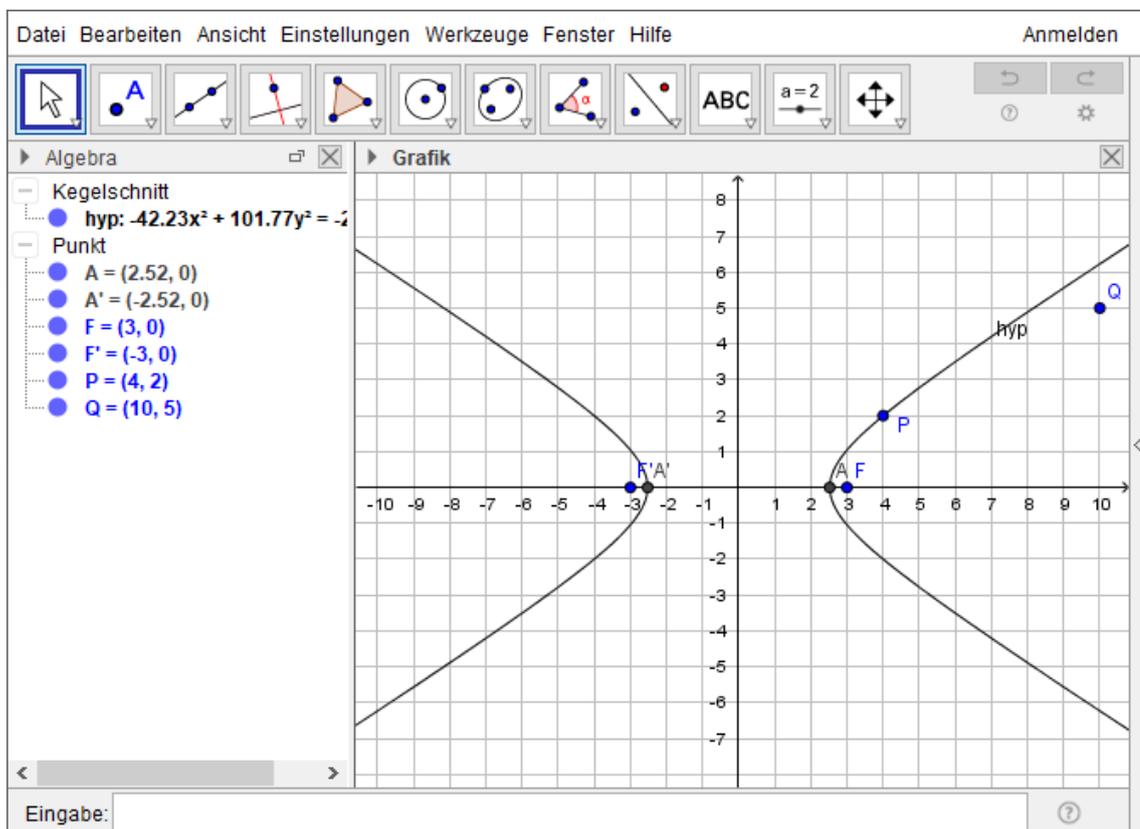
Eingabe:



**G 5.07** Um die Scheitelpunkte der Ellipse ell zu ermitteln, gibt man den Befehl „Scheitel(ell)“ ein.



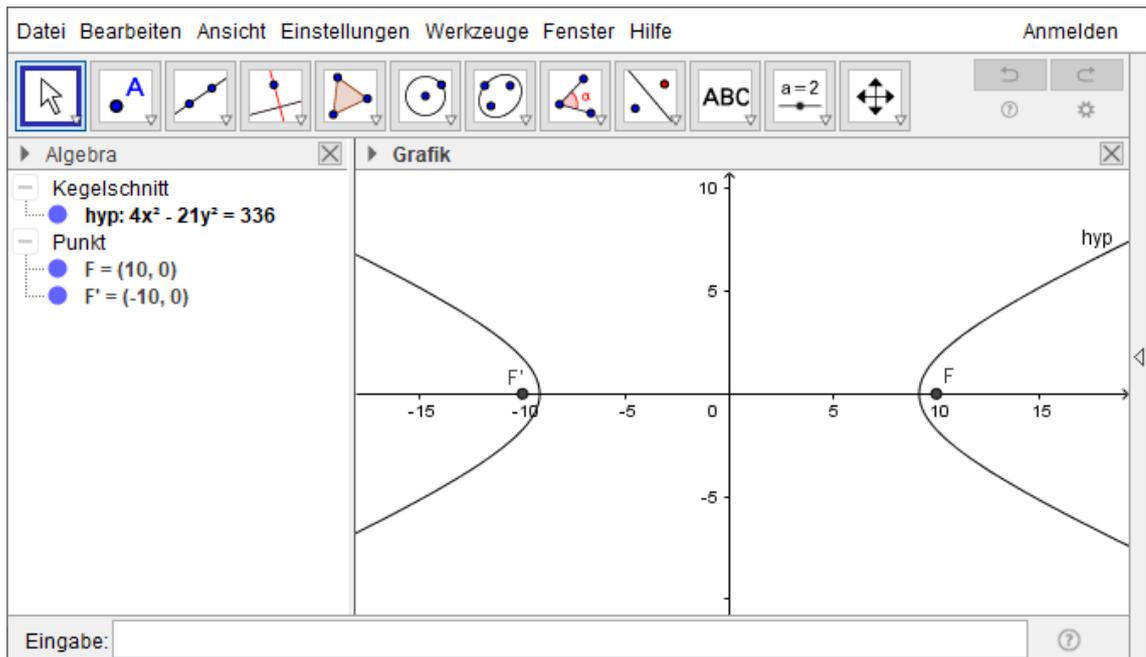
**G 5.09**



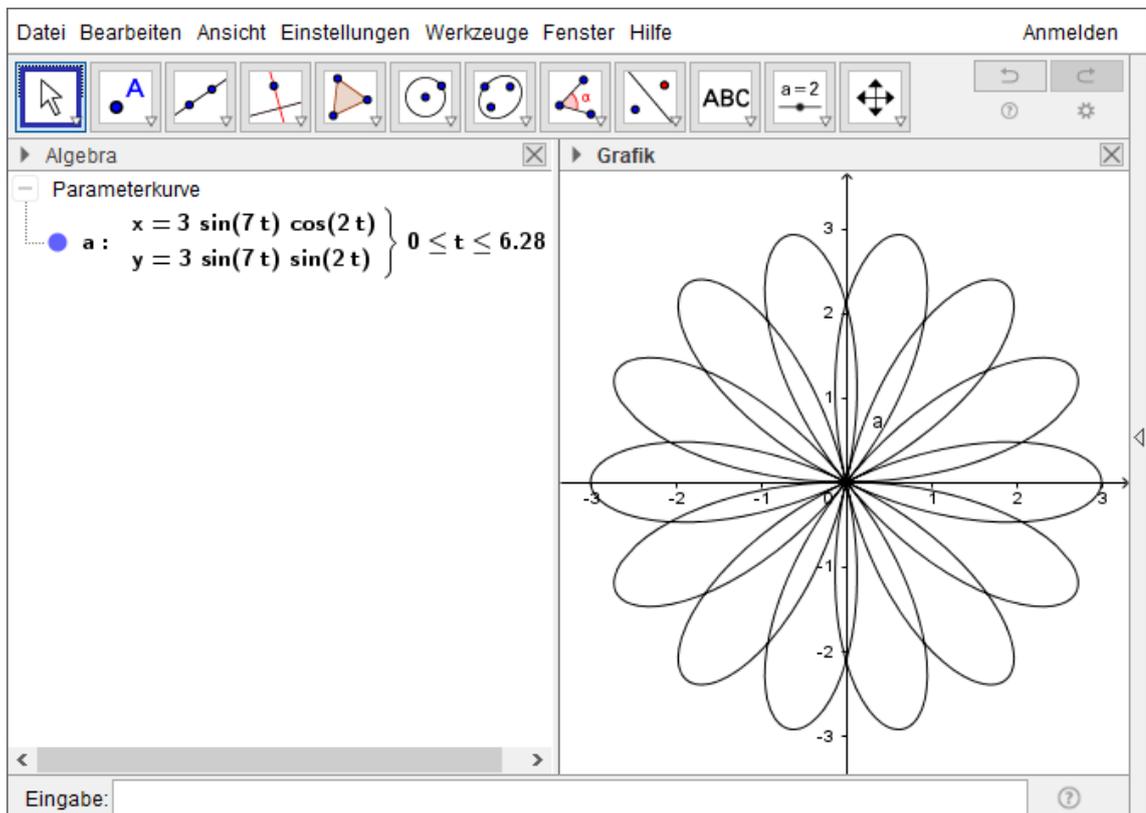
Die Hyperbel hat die Hauptachsenlänge  $a \approx 2,52$ . Der Punkt Q liegt nicht auf der Hyperbel.



G 5.11



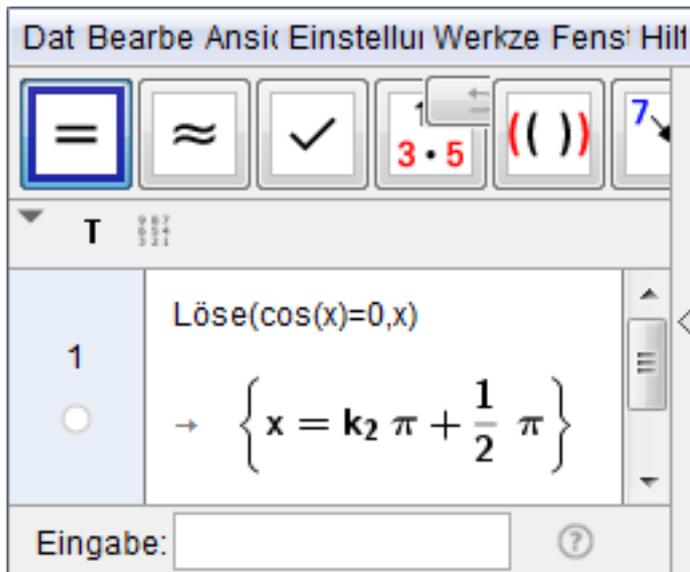
G 6.02



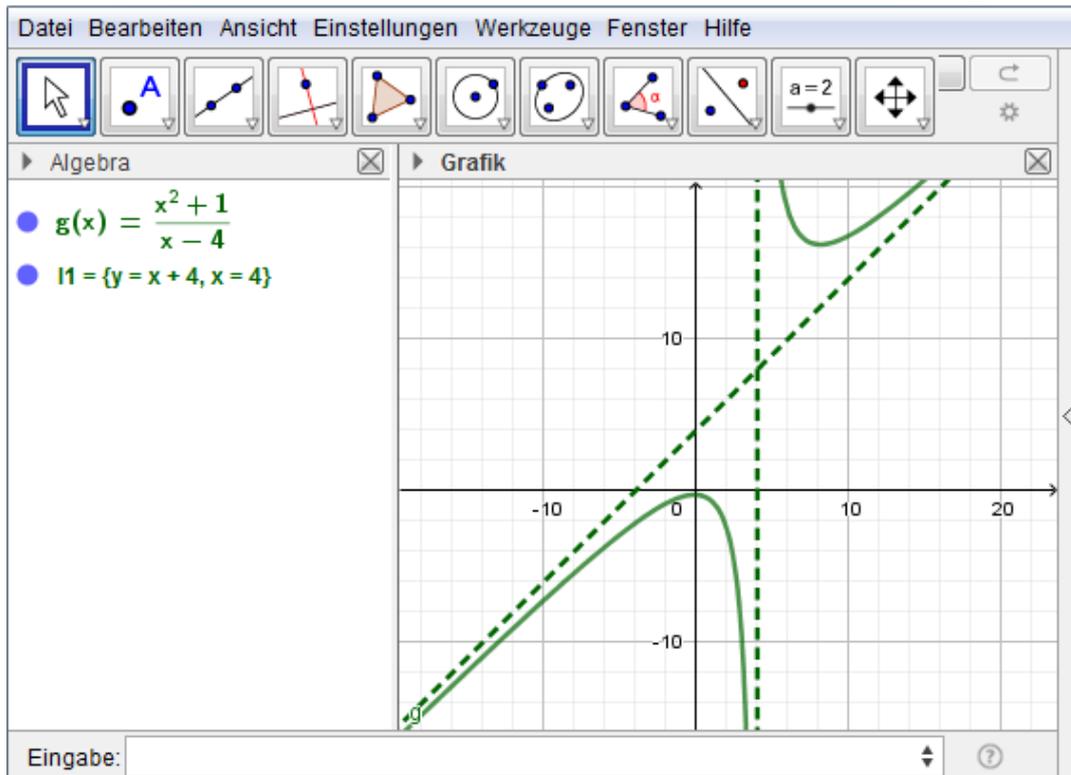
G 7.02 Die Pole sind die Nullstellen des Nenners,  $1 \pm \sqrt{2}$ . Überprüfe selbst anhand des Graphen!



G 7.03



G 7.05



Hier ist nur die Lösung für a) gezeigt. Für alle anderen Funktionen ist genauso zu verfahren.

G 7.06

Für alle Funktionen ist genauso zu verfahren wie in Aufgabe 7.05.



G 7.08

File Edit View Settings Tools Window Help

=  ≈  ✓  15  ( )  7  X =  X ≈

T

1	Ableitung(u(x)/v(x)) → $\frac{-u(x) v'(x) + v(x) u'(x)}{v(x)^2}$
2	Ableitung(f(k x)) → $k f'(k x)$
3	Ableitung(f(g(x))) → $f'(g(x)) g'(x)$

Eingabe:

G 7.09

Date Bearbeite Ansicht Einstellung Werkzeug Fenste Hilfe

=  ≈  ✓  15  ( )  7  X =

T

1	Ableitung(f(g(h(x)))) → $f'(g(h(x))) g'(h(x)) h'(x)$
---	---

Eingabe:

G 7.10

File Edit View Settings Tools Window Help

A          a=2

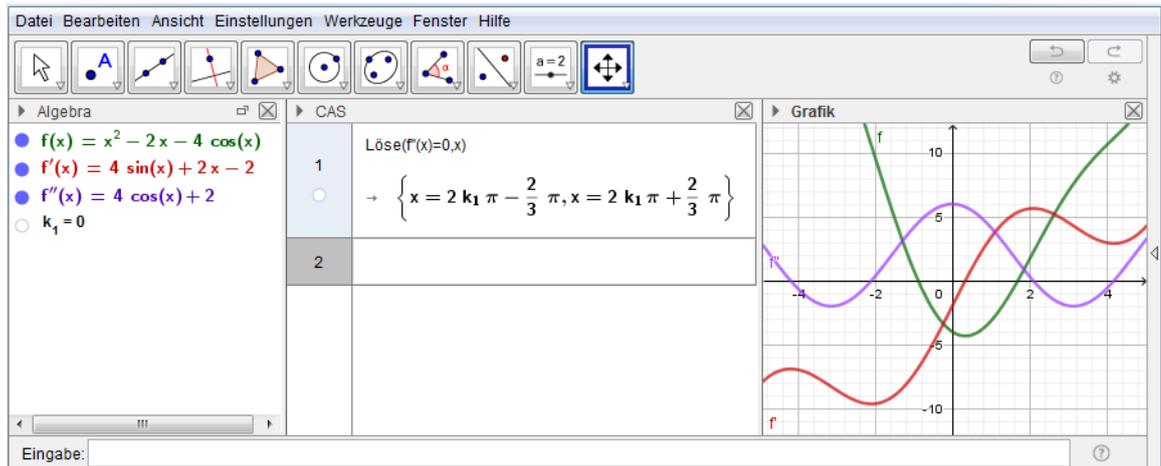
Algebra Grafik

- $f(x) = x^2 - 2x - 4 \cos(x)$
- $f'(x) = 4 \sin(x) + 2x - 2$
- A = (0.3375837049452, -0.000000000)

Eingabe:

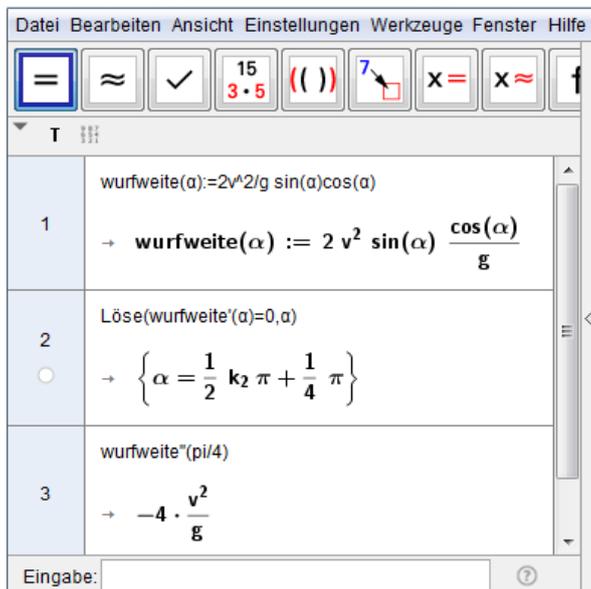


**G 7.11**



Ja, f besitzt Wendestellen, und zwar unendlich viele. Jede Nullstelle von f' ist, wie der Graph zeigt, eine lokale Extremstelle von f. Das CAS kann diese Nullstellen exakt berechnen. Es handelt sich dabei um jene Winkel (im Bogenmaß), deren Cosinus gleich  $-\frac{1}{2}$  ist.

**G 7.12**



Unter den unendlich vielen formalen Lösungen ( $k_1$  steht für eine beliebig wählbare ganze Zahl) ist  $\frac{\pi}{4}$ , also 45°, die gesuchte.

**G 7.13**

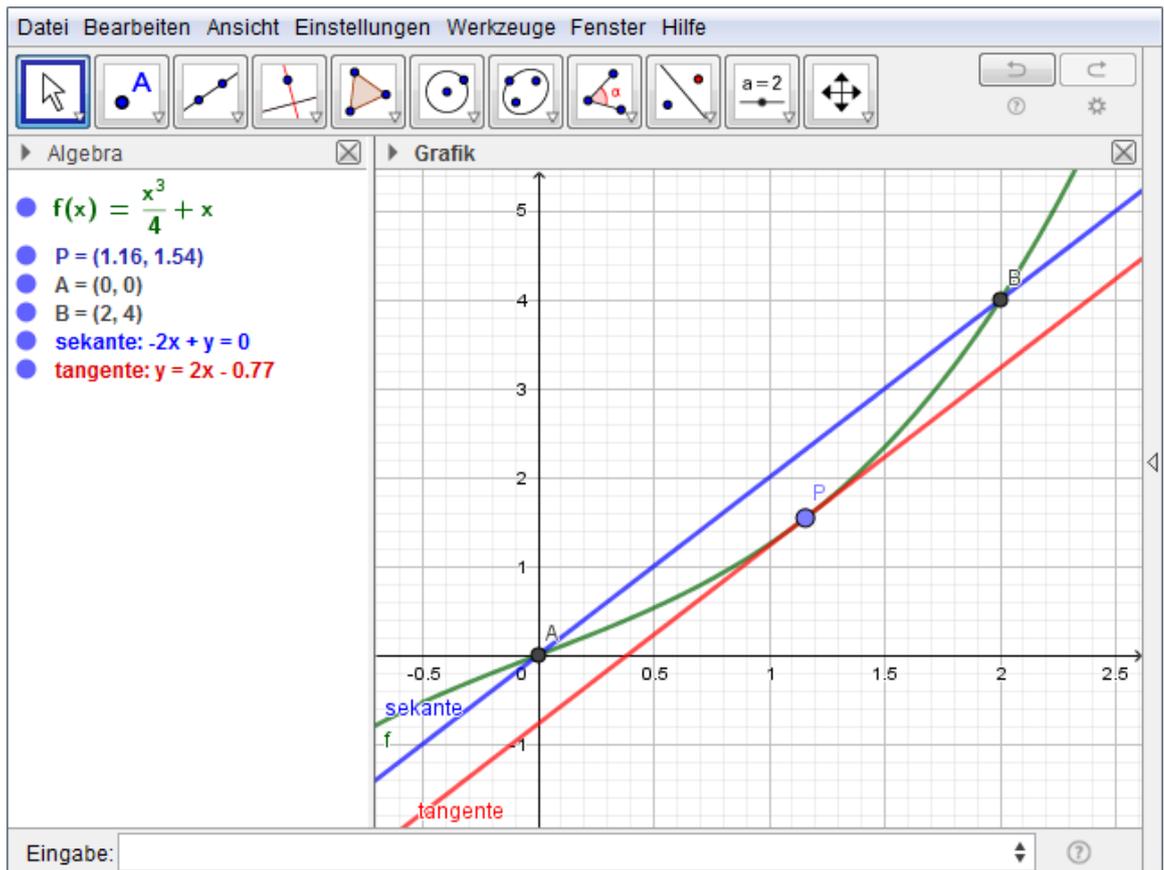
- a) Lokales Maximum bei  $x = 0$ , zwei Wendestellen bei  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ , Asymptote = x-Achse.
- b) Lokales Minimum bei  $x = 0$ , keine Wendestellen, Asymptoten  $y = \pm x$ .
- c) Lokales Maximum bei  $x = 0$ , zwei Wendestellen bei  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , Asymptote = x-Achse.

**G 7.14**

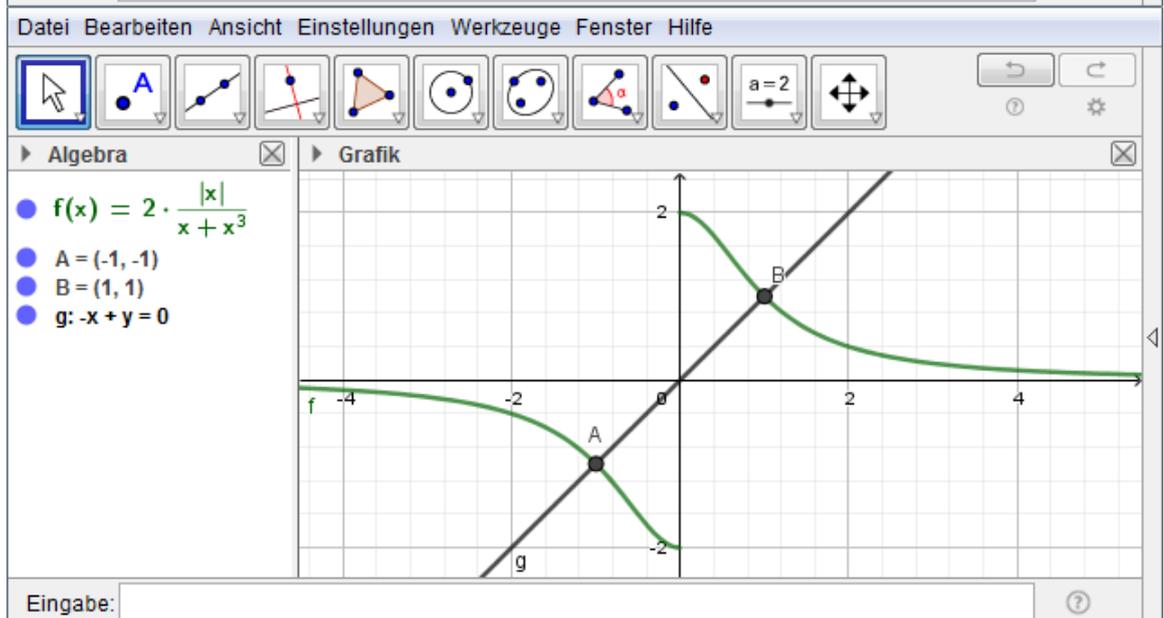
GeoGebra hält bei der ersten Berechnung y konstant und differenziert nach x, bei der zweiten umgekehrt.



G 8.02



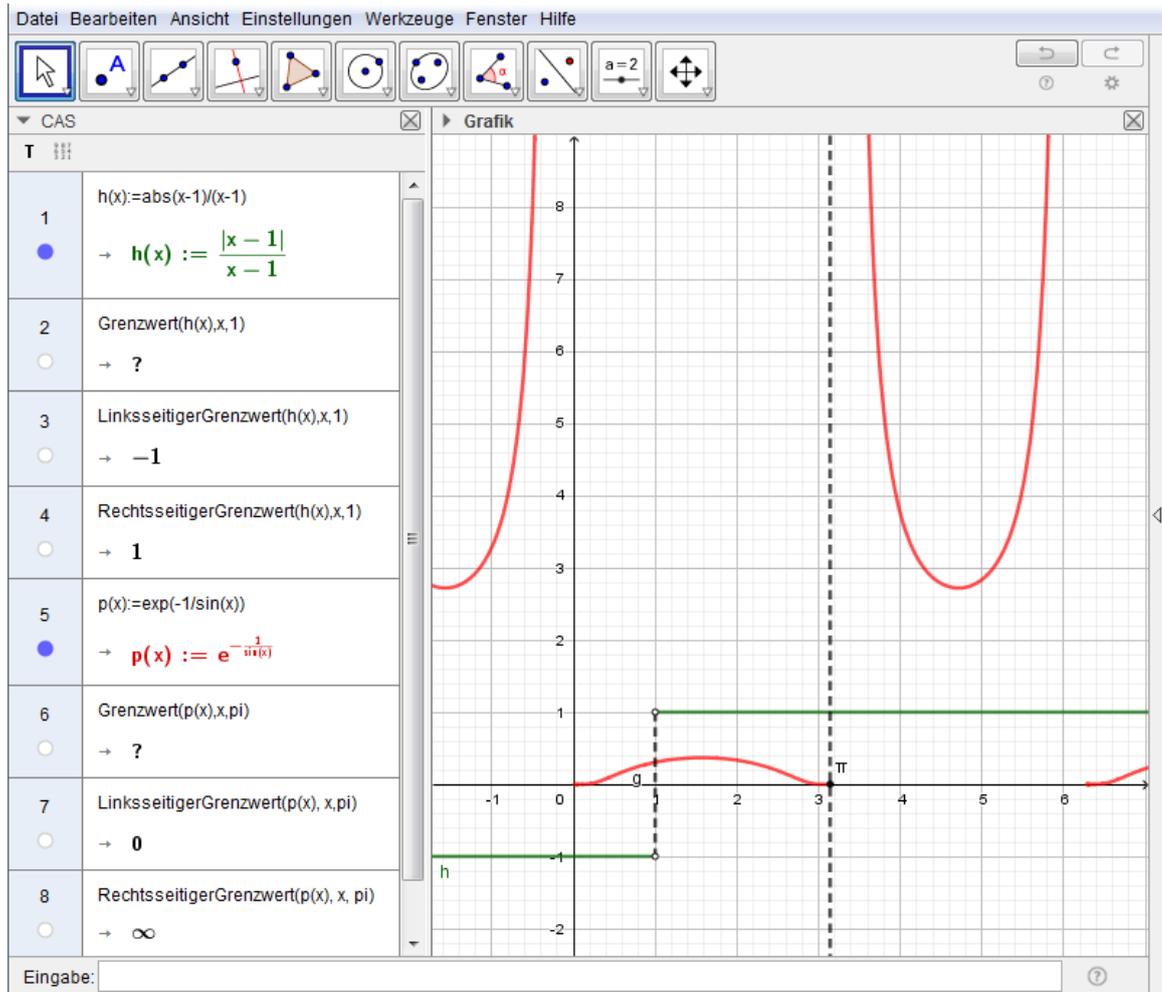
G 8.03



Die Funktion  $f$  ist an der Stelle  $0$  nicht definiert. Man kann zwar nachträglich  $f(0)$  festlegen, um eine überall definierte Funktion zu erhalten, aber diese Funktion ist – egal wie  $f(0)$  gewählt wird – unstetig. Der Mittelwertsatz der Differentialgleichung verlangt aber, dass  $f$  differenzierbar ist. Daher ist er hier nicht anwendbar.



**G 8.05**



a) funktioniert wie in Aufgabe G8.04, mit  $x$  durch  $-x$  ersetzt.  
 b) und c) werden gezeigt.

**G 9.03**

möglicher Funktionsterm:  
 $K(x) = 0.00012x^3 - 0.04232x^2 + 5.97727x + 118.56092$

**G 9.04**

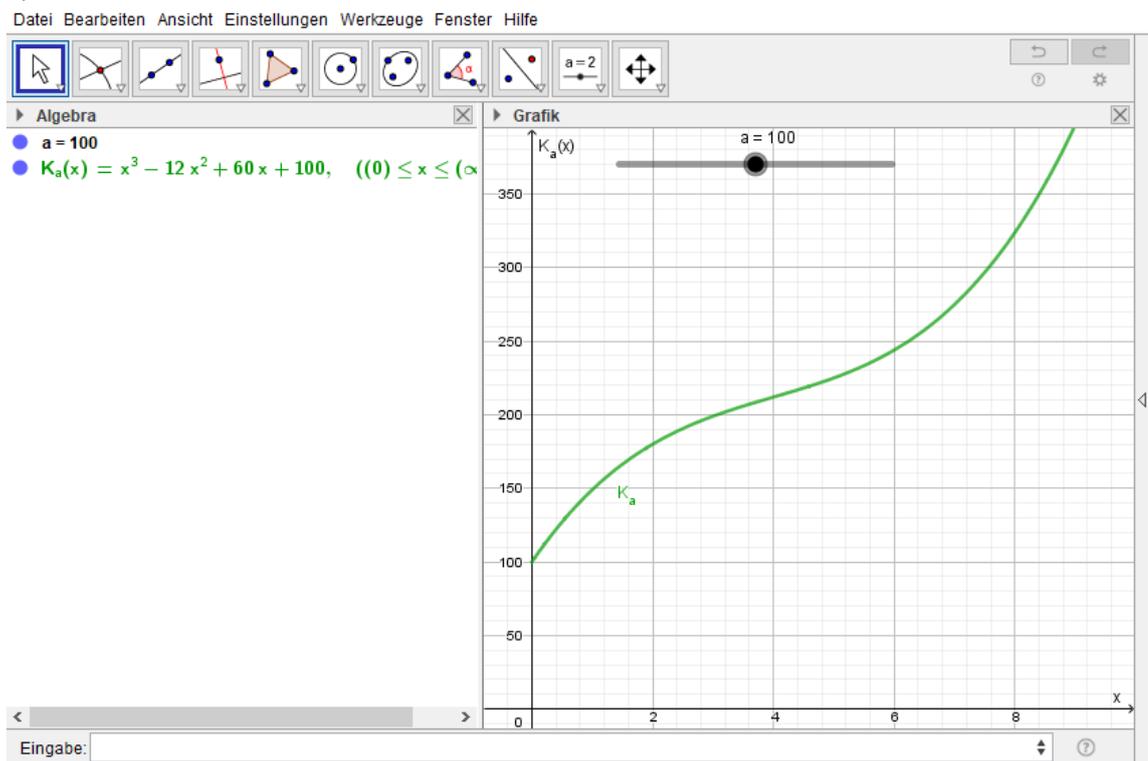
möglicher Funktionsterm:  
 $\bar{K}(x) = 0.00001x^3 + 0.00338x^2 + 0.96141x + 353.2458$

**G 9.05**

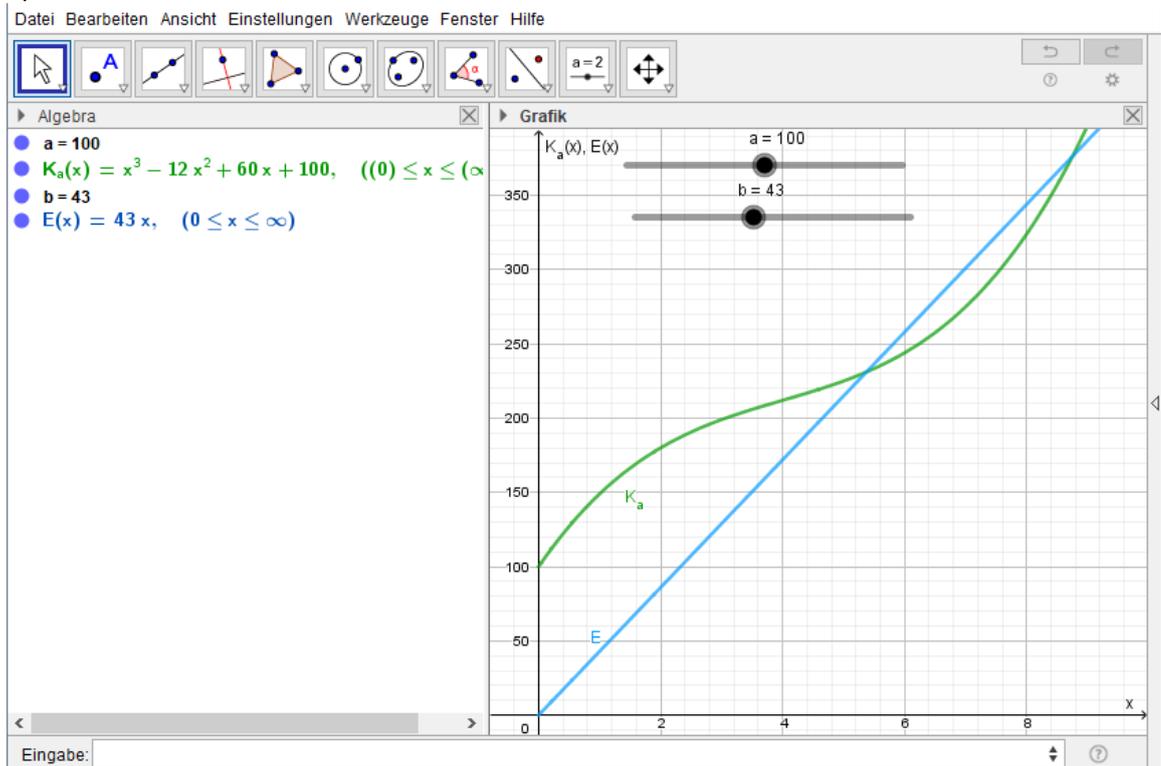
Betriebsoptimum  $x_{opt} \approx 500$



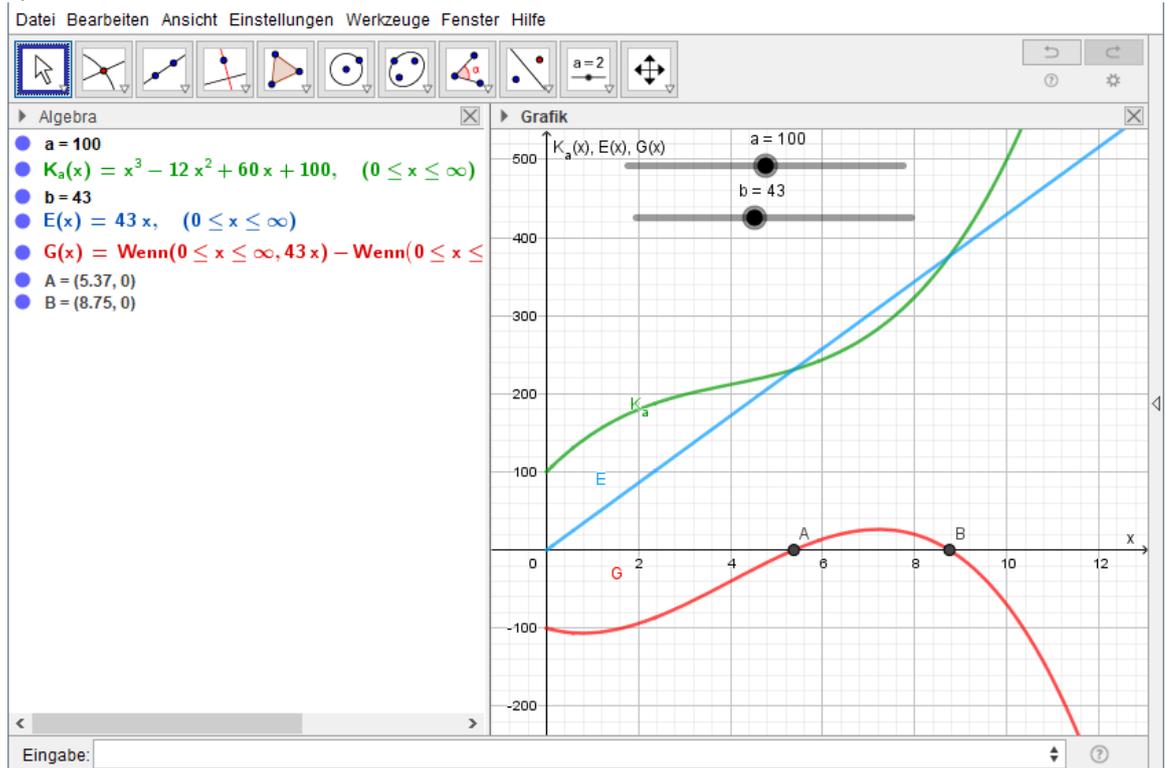
G 9.08 a)



b)



c)

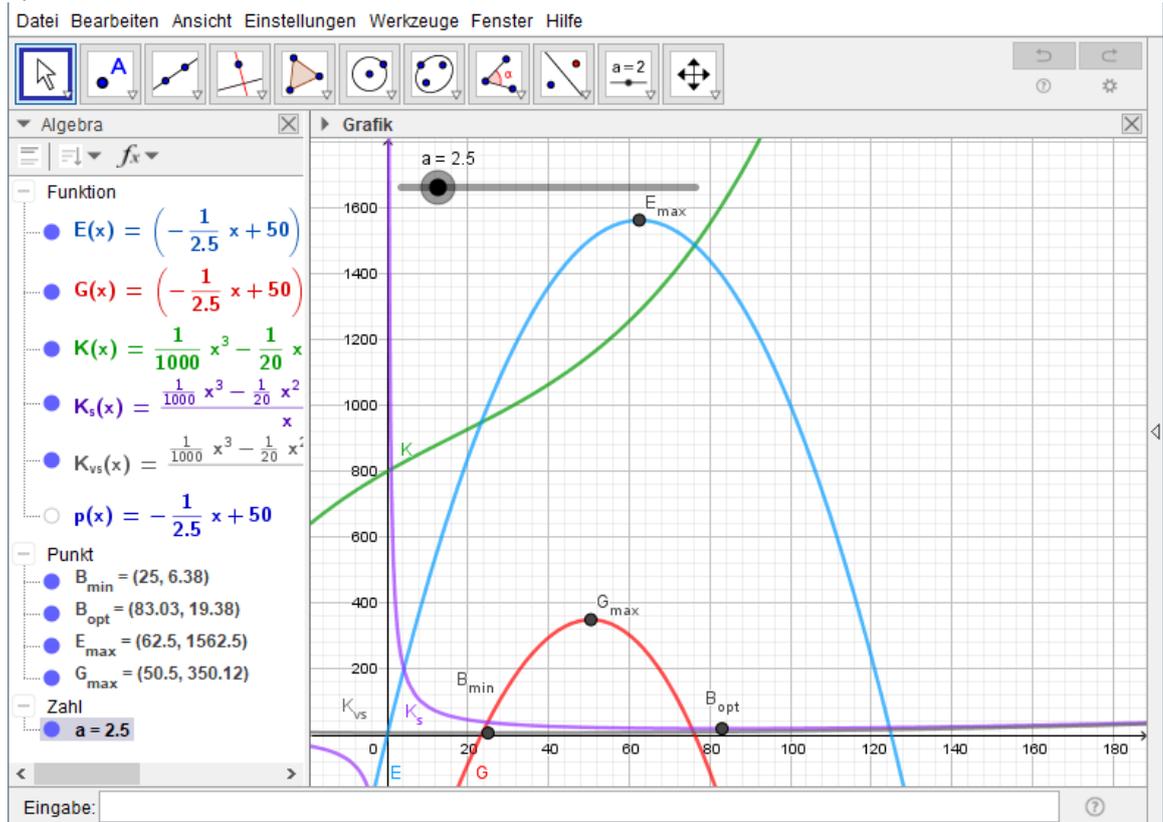


Wenn a steigt/fällt, dann verkleinert/vergrößert sich der Gewinnbereich. Wenn b steigt/fällt, dann vergrößert/verkleinert sich der Gewinnbereich.



**G 9.09**

a)



Werte für  $a = 2,5$

b) Das Gewinnmaximum und das Erlösmaximum ändern sich, wenn sich der Wert von  $a$  ändert.

**G 10.10**

a) Ja, die Punkte mit den Koordinaten Produktionsmenge und Kosten liegen annähernd auf einer Geraden. Der Term der Trendgeraden lautet:  $K(x) = 5,25 \cdot x + 1005,24$

b) Ein möglicher Term für eine Kostenfunktion als Polynomfunktion dritten Grades lautet:  
 $K(x) = 0.0001x^3 - 0.0437x^2 + 7.6301x + 1017.8297$

c)  $BEP_1 = (99,21|1488,15)$ ,  $BEP_2 = (381,63|5724,4)$ , Produktionsmenge für einen maximalen Gewinn: 262,26, Kostenkehre: 99,22

d) Alle obigen Kennzahlen verändern sich.



G 11.02

File Edit View Settings Tools Window Help Anmelden

=  ≈  ✓  15 / 3 · 5  (( ))  7  x =  x ≈  f'

T	
1	18! → <b>6402373705728000</b>
2	BinomialKoeffizient(18, 3) → <b>816</b>
3	

Eingabe:

G 11.06

Verteilung Statistik

$\mu = 0,24 \quad \sigma = 0,48$

k	P(X = k)
0	0.7828
1	0.1957
2	0.0204
3	0.0011
4	0

Binomial

n 6 p 0.04

P( 1 ≤ X ) = 0,2172

Hans muss mit  $P(X \geq 2) \approx 0,2172$  mindestens einmal abwaschen.  
 $\mu = 0,24; \sigma = 0,48$

G 12.02

File Edit View Settings Tools Window Help Anmelden

=  ≈  ✓  15 / 3 · 5  (( ))  7  x =  x ≈  f'

T	
1	$(1+2i)+(3-4i)$ → <b><math>4 - 2i</math></b>
2	$(1+2i)-(3-4i)$ → <b><math>-2 + 6i</math></b>
3	$(1+2i) \cdot (3-4i)$ → <b><math>11 + 2i</math></b>
4	$(1+2i)/(3-4i)$ → <b><math>\frac{-1 + 2i}{5}</math></b>

Eingabe:

