

FUNKTIONEN ALS MATHEMATISCHE MODELLE

Eigenschaften mathematischer Modelle

In Abb. 1 ist eine Fieberkurve gezeichnet. Sie beruht auf Messungen der Körpertemperatur an zwei aufeinanderfolgenden Tagen, jeweils um 6:00, 12:00 und 18:00 Uhr. Welche Körpertemperatur müsste der Patient aufgrund dieser Kurve am zweiten Tag um 3 Uhr früh haben?

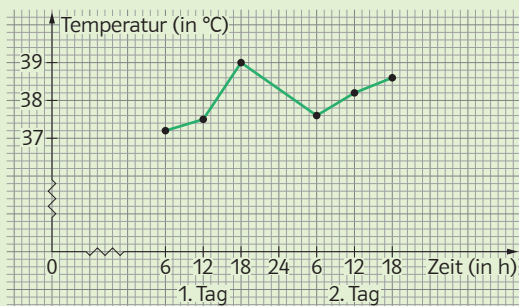


Abb. 1 Fieberkurve (wenig Messpunkte)

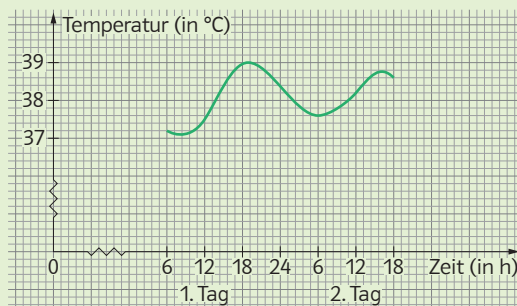


Abb. 2 Fieberkurve (viele Messpunkte)

LÖSUNG: ca. 38 °C

Wird ein realer Sachverhalt mit mathematischen Mitteln beschrieben, so nennt man diese Beschreibung ein **mathematisches Modell** des Sachverhalts. So bildet etwa die in Abb. 1 dargestellte Fieberkurve ein mathematisches Modell für den Fieberverlauf des Patienten. Dieses Modell gibt den Fieberverlauf nicht sehr genau wieder, da das Fieber nur zu gewissen Tageszeiten gemessen wurde.

In ähnlicher Weise lassen sich viele andere Sachverhalte durch Funktionen beschreiben, wie wir in den vorangegangenen Abschnitten gesehen haben. Dabei erhält man im Allgemeinen mathematische Modelle, welche die entsprechenden Sachverhalte nur ausschnittsweise und ungenau beschreiben.

Wir halten fest:

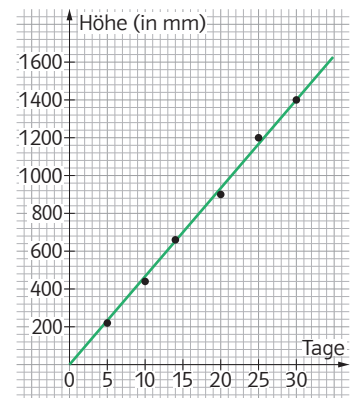
Ein **mathematisches Modell** beschreibt den zugrundeliegenden Sachverhalt im Allgemeinen nur **ausschnittsweise** und **ungenau**.

Eine Fieberkurve wie in Abb. 1 reicht für den praktischen Gebrauch aus, da sie üblicherweise nur dazu dient, rasch ablesen zu können, ob das Fieber des Patienten ansteigt oder abnimmt, ob es gefährlich hoch wird oder Ähnliches. Es kann aber sein, dass man aus irgendeinem Grund an dem genaueren Verlauf des Fiebers interessiert ist, zB wenn eine Pharmafirma den zeitlichen Verlauf eines fiebersenkenden Medikaments untersuchen will. Dann muss man öfter Messungen durchführen oder den Patienten an ein Gerät anschließen, welches die Fieberwerte kontinuierlich aufzeichnet. Dadurch würde man einen Funktionsgraphen erhalten, der dem in Abb. 2 ähnlich ist. Die einfache Fieberkurve in Abb. 1 wäre für die Pharmafirma ein schlechtes (weil zu ungenaues) Modell, für eine Ärztin bzw. einen Arzt wäre aber wiederum die detaillierte Fieberkurve in Abb. 2 nicht so praktisch, weil zu viele Details eine schnelle Einschätzung des Fieberverlaufs erschweren.

Wir fassen zusammen:

Um einschätzen zu können, ob ein **mathematisches Modell** **gut** oder **schlecht** ist, muss man wissen, zu welchem **Zweck** das Modell verwendet wird.

Nebenstehend sind die in regelmäßigen Zeitabständen gemessenen Höhen einer Bohnenpflanze dargestellt. Darf man aufgrund dieser Daten annehmen, dass zwischen der Wachstumsdauer und der Pflanzenhöhe ein linearer Zusammenhang besteht? Obwohl die Punkte nicht exakt auf einer Geraden liegen, spricht vieles für die Annahme, dass ein lineares Modell das Pflanzenwachstum gut beschreibt. Die geringfügigen Abweichungen der Punkte von einer Geraden kann man einerseits durch unvermeidliche Messfehler, andererseits aber sachlich durch verschiedene nicht kontrollierbare Umwelteinflüsse auf die Pflanze (zB die Witterung) erklären. Kurz: Das lineare mathematische Modell gilt eigentlich nur unter **idealen Bedingungen** für Pflanzenwachstum sowie Messung. Es stützt sich letztlich auf die sachlich begründete **Annahme**, dass sich unter idealen Bedingungen das Pflanzenwachstum „gleichmäßig“ vollzieht.



Das vorliegende lineare Wachstumsmodell liefert eine gute näherungsweise Beschreibung der Realsituation und bringt gleichzeitig mehrere praktische Vorteile mit sich:

- Der Graph kann leicht gezeichnet werden (etwa mit einem Lineal).
- Eine Termdarstellung der Funktion kann leicht gefunden werden. (Überprüfe, dass das Wachstum durch $h(t) = 46,7 \cdot t$ gut beschrieben wird!)
- Die gefundene Termdarstellung eignet sich gut für mathematische Weiterverarbeitungen (zB Umformungen oder Gleichungslösen).



Wir halten also fest:

Ein mathematisches Modell gibt einen realen Sachverhalt im Allgemeinen in **idealisierter Form** wieder, wobei gewisse **Annahmen** getroffen werden (auch wenn man weiß, dass diese in der Realität nicht genau erfüllt sind). Die Annahmen werden nach Möglichkeit so getroffen, dass das Modell **überschaubar** und **handhabbar** wird.

Wir haben schon anhand der Fieberkurve gesehen, dass man einen realen Sachverhalt durch verschiedene Funktionen beschreiben kann. Wir halten also fest:

Ein und derselbe **Sachverhalt** kann durch **verschiedene mathematische Modelle** beschrieben werden.

Es gilt aber auch das Umgekehrte:

Mit ein und demselben **mathematischen Modell** kann man **verschiedene Sachverhalte** beschreiben.

Ein einfaches Beispiel dafür liefert die direkte Proportionalitätsfunktion f mit

$$f(x) = k \cdot x$$

In der nachfolgenden Tabelle finden sich einige Situationen, die mit dieser Funktion beschrieben werden können.

$f(x)$	k	x
Gesamtpreis	Preis pro kg (bzw. pro Stück)	Warenmenge
zurückgelegter Weg	Geschwindigkeit	Zeit
Gesamtlohn	Stundenlohn	Arbeitszeit
gesamter Benzinverbrauch	Verbrauch pro Kilometer	Wegstrecke