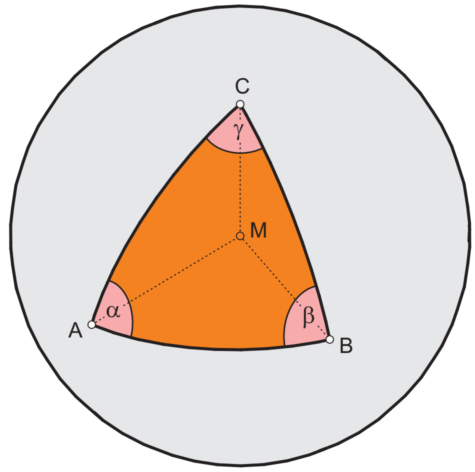
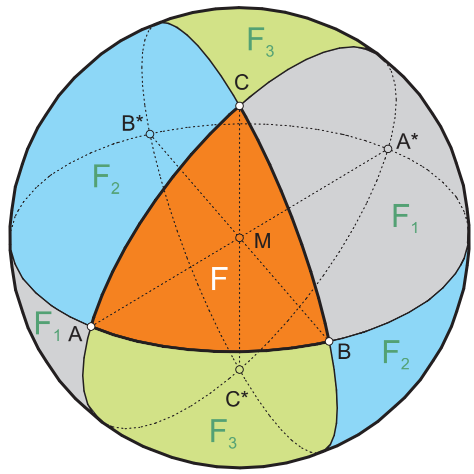
Sphärische Dreiecke



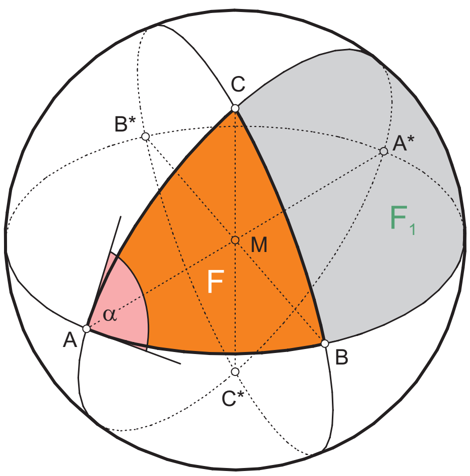
Ein Dreieck in der Ebene (ebenes Dreieck) wird von den drei Eckpunkten und deren kürzesten Verbindungslinien – also drei Strecken – gebildet.

Analog wird ein Dreieck auf der Kugel (sphärisches Dreieck) von drei Eckpunkten und deren kürzesten Verbindungslinien – also drei Großkreisbögen – gebildet.

In einem ebenen Dreieck ist die Summe der Eckenwinkel α, β und γ bekanntlich stets 180°.
In einem sphärischen Dreieck ist die Summe der Eckenwinkel stets größer als 180°; der Winkelüberschuss $180°-\alpha-\beta-\gamma$ ist proportional zum Flächeninhalt des Dreiecks. Dies werden wir nun herleiten!



Verlängern wir die Seiten eines sphärischen Dreiecks ABC, so erhalten wir drei Großkreise, welche die Kugelfläche in acht sphärische Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte die gegenüberliegenden Punkte A und A*, B und B* sowie C und C* sind. Dabei sind gegenüberliegende Dreiecke (etwa AB*C und A*BC*) kongruent. Benachbarte Dreiecke – sie haben eine Seite gemeinsam, etwa ABC und A*BC – bilden ein Zweieck. Ein Zweieck wird von zwei Halbkreisen berandet, die zwei gegenüberliegende Punkte der Kugelfläche verbinden.



Da der Eckenwinkel α eines Zweiecks der Winkel der Halbkreistangenten im Eckpunkt A ist und diese Tangenten auf den Durchmesser AA* normal stehen, ist α auch der Winkel der beiden Halbkreisebenen.
Du solltest nun die folgende Flächenformel für das Zweieck begründen können, wobei r der Radius der Kugel ist. Denke dabei an die Herleitung der Flächenformel für den Kreissektor!

$$F + F_1 = \frac{4r^2\pi}{360} \cdot \alpha$$

Nun kannst du die Flächeninhalte $F+F_1$, $F+F_2$ und $F+F_3$ ausdrücken und addieren. Wenn du dann noch beachtest, dass $F+F_1+F_2+F_3$ den Flächeninhalt der Halbkugelfläche ergibt, kannst du den Flächeninhalt des Dreiecks ABC leicht herleiten:

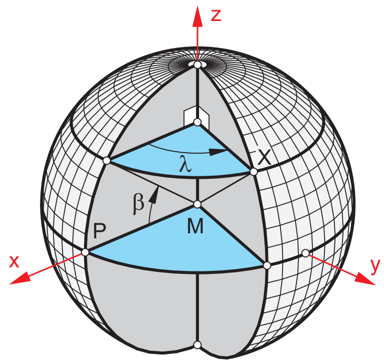
$$F = \frac{r^2\pi}{180} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 180)$$

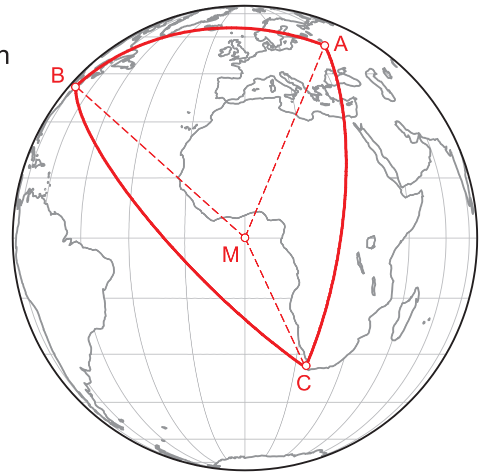
Wenn du die Winkel α, β und γ im Bogenmaß ausdrückst – wir bezeichnen die Werte mit α', β' und γ' –, so lässt sich die Flächenformel wie folgt umformen:

$$F = r^2 \cdot (\alpha' + \beta' + \gamma' - \pi)$$

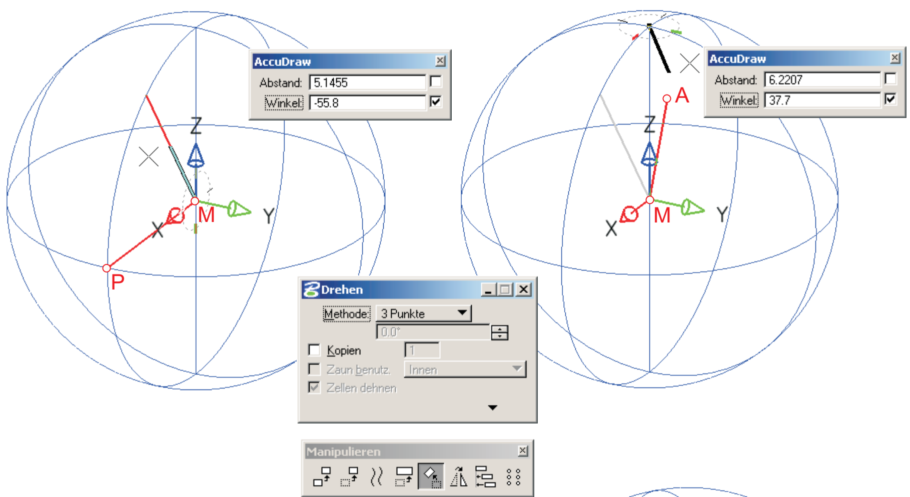
Auf der Einheitskugel (r = 1) ist der Winkelüberschuss daher identisch mit dem Flächeninhalt.

Ermittle den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks mit den Ecken Moskau (37,7° öL, 55,8° nB), New York (73,8° wL, 40,7° nB) und Kapstadt (18,3° öL, 33,9° sB)!

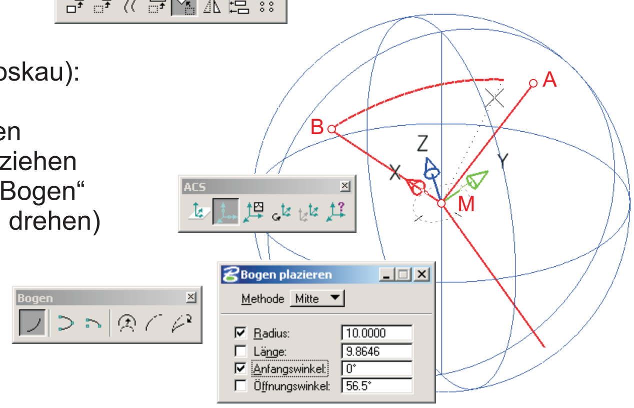


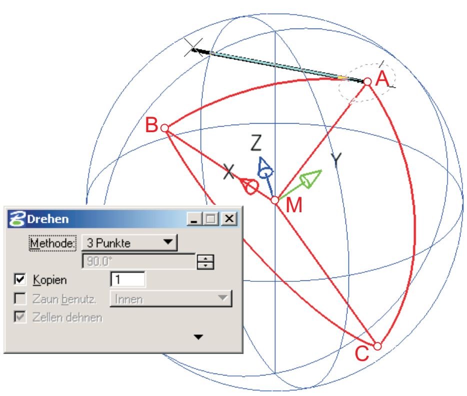


1) Einmessen der Städte, zB von A (Moskau): Kugel mit beliebigem Radius aufziehen, Äquator in xy-Ebene und Nullmeridian in xz-Ebene annehmen, Strecke vom Kugelmittelpunkt M zum Punkt P(0° L, 0° B) zeichnen, MP um 55,8° nach Norden drehen (mit Werkzeug „Drehen“ aus dem Werkzeugkasten „Manipulieren“ der Hauptpalette, AccuDraw in xz-Ebene, mit Leertaste auf Bogenmaß umschalten), dann um 37,7° nach Osten drehen (AccuDraw parallel zu xy-Ebene)

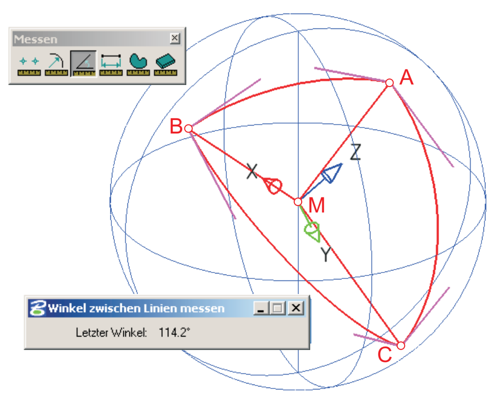


2) Großkreisbögen zeichnen, zB von B (New York) nach A (Moskau): ACS geeignet platzieren (zB mit MB als x-Achse und MAB als xy-Ebene, mit Werkzeug „ACS definieren“ aus Werkzeugkasten „Hilfskoordinaten“), Großkreisbogen in xy-Ebene des ACS aufziehen (mit Werkzeug „Bogen platzieren“ aus dem Werkzeugkasten „Bogen“ der Hauptpalette, AccuDraw mit Taste E in xy-Ebene des ACS drehen)





3) Tangenten an die Großkreisbögen aufziehen, zB an den Großkreisbogen von A nach B: ACS von 2) verwenden, in xy-Ebene Radius MA um 90° um A drehen (mit Werkzeug „Drehen“, Kopien anhaken, AccuDraw in xy-Ebene legen)



4) Eckenwinkel des sphärischen Dreiecks als Winkel zwischen den Tangenten messen (mit Werkzeug „Winkel zwischen Linien messen“ aus dem Werkzeugkasten „Messen“ der Hauptpalette):
α = 114,2°, β = 81,4°, γ = 66,0°

5) Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks mit der auf der vorigen Seite hergeleiteten Formel berechnen (r = 6370 km):

$$F = \frac{r^2\pi}{180} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 180) \quad \Rightarrow \quad F = 5\,778\,916 \text{ km}^2$$