

Big Bang HTL 1

Kap. 2 Die sieben Basiseinheiten des SI

a) Zahlendarstellungen (zu Band 1, Seite 10/11)

In der Physik treten häufig sehr kleine oder sehr große Zahlen auf, sodass die übliche Zahlendarstellung (zB 130; 9,7; -0,034) äußerst unhandlich wird (27000000; 0,00000000003). Deshalb ist man für diese Fälle zu der bequemerem **normierten Zahlendarstellung** (auch **Exponentialdarstellung** genannt) übergegangen. Dabei wird eine Zahl durch ein Produkt **Mantisse** mal **Zehnerpotenz** dargestellt. Die Zehnerpotenz ist im Allgemeinen so gewählt, dass die Mantisse im Bereich $1 \leq \text{Mantisse} < 10$ liegt.

Beispiele 2.1

Mantisse Zehnerpotenz

$$673 = 6,73 \cdot 100 = \underline{6,73 \cdot 10^2}$$

$$0,0031 = 3,1 \cdot 0,001 = \underline{3,1 \cdot 10^{-3}}$$

$$-0,000000782 = -7,82 \cdot 0,0000001 = \underline{-7,82 \cdot 10^{-7}}$$

Übungen

2.1 Schreibe in normierter Zahlendarstellung

a) 34500 =

b) -0,00034 =

c) 0,00000001 =

d) -2350,1 =

Rechenregeln für Zahlen in normierter Darstellung:

Addition, Subtraktion

Schaffe gleiche Zehnerpotenzen und addiere/ subtrahiere die Mantissen.

Beispiele 2.2

$$3,4 \cdot 10^{-7} + 9,1 \cdot 10^{-7} = 12,5 \cdot 10^{-7} = \underline{1,25 \cdot 10^{-6}}$$

$$1,331 \cdot 10^4 - 1,327 \cdot 10^4 = 0,004 \cdot 10^4 = \underline{40}$$

$$9,746 \cdot 10^{-9} + 1,14 \cdot 10^{-11} = 974,6 \cdot 10^{-11} + 1,14 \cdot 10^{-11} = 975,74 \cdot 10^{-11} = \underline{9,7574 \cdot 10^{-9}} \text{ oder}$$

$$9,746 \cdot 10^{-9} + 1,14 \cdot 10^{-11} = 9,746 \cdot 10^{-9} + 0,0114 \cdot 10^{-9} = \underline{9,7574 \cdot 10^{-9}}$$

Übungen

2.2 a) $1,42 \cdot 10^{-3} + 9,893 \cdot 10^{-3} =$

b) $4,27 \cdot 10^{16} - 3,79 \cdot 10^{16} =$

c) $3,2 \cdot 10^4 + 6,3 \cdot 10^4 - 8,3 \cdot 10^4 - 2,9 \cdot 10^4 =$

d) $-6,1947 \cdot 10^{-8} - 3,63 \cdot 10^{-8} - 8,0072 \cdot 10^{-8} =$

2.3 a) $97,4 \cdot 10^{-3} + 6,4 \cdot 10^{-4} =$

b) $-48,1692 \cdot 10^{16} + 0,0632 \cdot 10^{18} =$

c) $24,6 \cdot 10^4 - 0,003 \cdot 10^7 + 70000 =$

d) $0,02 \cdot 10^{-6} + 13,4 \cdot 10^{-8} - 1204,13 \cdot 10^{-12} =$

Multiplikation, Division

Mantissen und Zehnerpotenzen werden beide getrennt voneinander multipliziert bzw. dividiert, wobei bei den Zehnerpotenzen die Rechenregeln für Potenzen zur Anwendung gelangen:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (n Faktoren a),}$$

$$a^{-n} = 1/a^n \quad a^0 = 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad a^m/a^n = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Beispiele 2.3

$$10^7 = \underline{10000000}$$

$$10^{-3} = \underline{0,001}$$

$$10^4 \cdot 10^7 = 10^{4+7} = \underline{10^{11}}$$

$$10^{-6} \cdot 10^3 = 10^{-6+3} = \underline{10^{-3}}$$

$$(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = \underline{10^6}$$

$$(9,3 \cdot 10^2) : (3 \cdot 10^2) = (9,3:3) \cdot (10^2:10^2) = \underline{3,1}$$

$$4 \cdot 10^{-2} \cdot 1,4 \cdot 10^3 = (4 \cdot 1,4) \cdot (10^{-2} \cdot 10^3) = 5,6 \cdot 10 = \underline{56}$$

$$1,7 \cdot 10^{-17} \cdot 9,1 \cdot 10^4 = (1,7 \cdot 9,1) \cdot (10^{-17} \cdot 10^4) = 15,47 \cdot 10^{-13} = \underline{1,547 \cdot 10^{-12}}$$

$$(1,33 \cdot 10^{-6}) : (-9,5 \cdot 10^{-8}) = (1,33:9,5) \cdot (10^{-6}:10^{-8}) = -0,14 \cdot 10^2 = \underline{-1,4 \cdot 10 = -1,4}$$

$$(2,1 \cdot 10^{-4})^3 = (2,1)^3 \cdot (10^{-4})^3 = \underline{9,261 \cdot 10^{-12}}$$

Übungen

2.4 a) $10^{-3} \cdot 10^7 =$

b) $10^{-4} \cdot 10^{-5} =$

c) $10^{-8} \cdot 10^8 =$

d) $10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} =$

2.5 a) $10^9 : 10^7 =$

b) $\frac{10^{-4}}{10^7} =$

c) $(10^{-6} : 10^4) : 10^{16} =$

d) $10^{413} : 10^0 : 10^{-413} =$

2.6 a) $\frac{10^4 \cdot 10^{-7}}{10^{-5} \cdot 10^3 \cdot 10^9} =$

b) $(10^{-3} : 10^7) \cdot (10^{-3} : 10^5) =$

c) $(10^{-7})^3 =$

d) $\left(\frac{10^2}{10^5}\right)^{-3} =$

2.7 a) $6,3 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 \cdot 10^6 =$

b) $2,083 \cdot 10^{27} \cdot 8,1 \cdot 10^{-24} =$

c) $(3,2 \cdot 10^{16}) : (6,4 \cdot 10^{18}) =$

d) $(3,84 \cdot 10^2) : (2,4 \cdot 10^{-8}) =$

2.8 a) $[(6,3 \cdot 10^4) \cdot (2,1 \cdot 10^{-2})] \cdot (0,3 \cdot 10^5) =$
 $(6,3 \cdot 10^4) : [(2,1 \cdot 10^{-2}) \cdot (0,3 \cdot 10^5)] =$

b) $[(6,3 \cdot 10^4) : (2,1 \cdot 10^{-2})] : (0,3 \cdot 10^5) =$
 $(6,3 \cdot 10^4) : [(2,1 \cdot 10^{-2}) \cdot (0,3 \cdot 10^5)] =$

2.9 a) $(6,21 \cdot 10^8 - 0,39 \cdot 10^{10}) \cdot 9,31 \cdot 10^{-18} =$

b) $(6,98 \cdot 10^4)^{-3} =$

c) $(18,21 \cdot 10^{-3} + 0,6 \cdot 10^{-2})^2 =$

d) $37,4 \cdot 10^{18} \cdot [(6,21 \cdot 10^3)^2 - 8,14 \cdot 10^5] =$

b) Zahlen mit Dimensionen (zu Band 1, Seite 9/10)

In unserer Umwelt kommen „reine“ Zahlen kaum vor, sondern treten meist in Verbindung mit einer **Einheit** auf (10 Finger, 14 Euro, ...). Eine physikalische Größe kann verschiedene Einheiten besitzen: Die Einheit einer Länge kann eine Meile oder ein Millimeter sein, die Einheit der Zeit Sekunde oder Tag. Deshalb hat man sich weltweit auf ein Einheitensystem geeinigt - auf das **Internationale Maßsystem SI** (siehe Tab. 2.1 in Band 1, S. 10).

Aber gerade ein solches System mit fixen Einheiten bewirkt, dass unhandliche Zahlen auftreten, dass also die normierte Zahlendarstellung vom vorigen Abschnitt äußerst nützlich ist: Die Entfernung Erde - Sonne ist mit $1,5 \cdot 10^{11}$ m einfacher angeschrieben als mit 150 000 000 000 m. Allerdings verwenden die Physiker Vereinfachungen, um von diesen großen (kleinen) Zehnerpotenzen wegzukommen: Einerseits gebrauchen sie **Abkürzungen** (zB die Vorsilbe Mikro- für 10^{-6} , Milli- für 10^{-3} , Kilo- für 10^3 – siehe Tab. 2.2 in Band 1, S. 10), andererseits werden zur Vereinfachung neue, dem entsprechenden Problem angepasste, Einheiten eingeführt: So wird zB für astronomische Entfernungen ein Lichtjahr verwendet.

Beispiele**B 2.4** Welche Länge gibt (größenordnungsmäßig) die Einheit Lichtjahr an?

Ein Lichtjahr ist jener Abstand, für dessen Durchquerung ein Lichtsignal ein Jahr benötigt. Die Lichtgeschwindigkeit ist

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} (\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$$

und ein („mittleres“) Jahr hat 365,25 Tage.

$$t = 365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 3,15576 \cdot 10^7 \text{ s} (\approx 3 \cdot 10^7 \text{ s}).$$

1 Lichtjahr misst damit

$$1 \text{ Lj} = c \cdot t = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} (\approx 10^{16} \text{ m})$$

B 2.5 18 g Wasser enthalten rund $6 \cdot 10^{23}$ Wassermoleküle. Wie viele Wassermoleküle sind in 0,33 l (1 Seidel) = 1000/3 g enthalten?

g Wasser	Anzahl Moleküle
18	$6 \cdot 10^{23}$
1	$6 \cdot 10^{23} : 18 = 1/3 \cdot 10^{23}$
1000/3	$1/3 \cdot 10^{23} \cdot 1000/3 = 1,1 \cdot 10^{25}$

Ein Seidel Wasser enthält rund 10^{25} Moleküle.

B 2.6 Ein Wasserstoff-Atom hat einen mittleren Durchmesser von 10^{-10} m. Wie groß ist sein Volumen unter der Annahme, dass das Atom Kugelgestalt hat?

$V = 4/3 \cdot r^3 \cdot \pi$, $r = 5 \cdot 10^{-11}$ m, sodass

$$V = 4/3 \cdot (5 \cdot 10^{-11})^3 \cdot \pi \text{ m}^3 = 4,19 \cdot 5^3 \cdot 10^{-33} \text{ m}^3 = 524 \cdot 10^{-33} \text{ m}^3 = 5,24 \cdot 10^{-31} \text{ m}^3$$

Das Volumen beträgt ca. $5 \cdot 10^{-31}$ Kubikmeter.

B 2.7 Ein sehr einfaches physikalisches Modell besagt, dass ein Atom ähnlich einem Sonnensystem aufgebaut ist, wobei dem Kern die Sonne und den Elektronen die Planeten entsprechen. Überlege, ob die Größenordnung der Massenverhältnisse übereinstimmt?

Wasserstoffatom: $m_{\text{Kern}} = m_{\text{Proton}} = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$m_{\text{Elektron}} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{P}} : m_{\text{e}} = (1,7 : 9,1) \cdot (10^{-27} : 10^{-31}) = 1,9 \cdot 10^3$$

Planetensystem: $m_{\text{Sonne}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

$$m_{\text{Erde}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$m_{\text{S}} : m_{\text{E}} = (1,99 : 5,98) \cdot (10^{30} : 10^{24}) = 3,33 \cdot 10^5$$

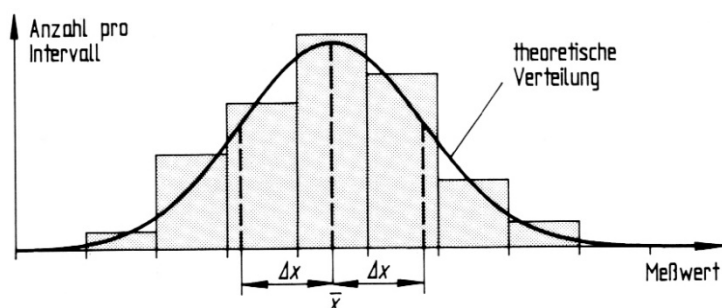
Das Verhältnis $m_{\text{S}} : m_{\text{E}}$ ist ca. 170-mal größer als $m_{\text{P}} : m_{\text{e}}$.

Obwohl die Masse der Sonne um einen Faktor 10^{57} größer ist als die Masse eines Protons, unterscheiden sich die Massenverhältnisse zu den begleitenden Körpern (Erde bzw. Elektron) nur um einen Faktor 170!

Übungen

- 2.10** Die Masse der Erde ist ungefähr 10^{22} Tonnen, die Masse eines Atoms 10^{-23} g. Aus wie vielen Atomen ist die Erde aufgebaut?
- 2.11** a) Die Entfernung von der Sonne bis zum äußersten Planeten Pluto ist $6 \cdot 10^{12}$ m. Wie groß ist der Abstand bis zur nächsten Sonne? Stelle eine Vermutung auf.
 b) Der Durchmesser unserer Milchstraße (eine Galaxis) ist im Mittel $4 \cdot 10^{20}$ m. Wie groß schätzt du die Entfernung bis zur nächsten Galaxis?
 c) Gib die Entfernungen - Angaben und Antwort von Übung a) und b) - in Lichtjahren an.
 d) Wenn eine Sonne (Durchmesser $d \approx 10^9$ m) auf die Größe eines Tennisballs ($d \approx 5 \cdot 10^{-2}$ m) verkleinert wäre, wieweit wäre in diesem Maßstab die nächste Sonne entfernt?
 e) Wenn eine Galaxis auf die Größe eines Tennisballs verkleinert wäre, wie weit wäre der Abstand zur nächsten Galaxis?
- 2.12** a) Wie viele Millisekunden enthält eine Stunde?
 b) Wie viele Gramm enthält eine Gigatonne?
 c) Wie viele Sekunden enthält ein Jahr (kein Schaltjahr)?
- 2.13** a) Eine Galaxis beinhaltet ca. 10^{11} Sterne, die Masse einer Galaxis ist ca. 10^{41} kg. Wie groß ist die Durchschnittsmasse eines Sterns?
 b) Ein Kilogramm Blei enthält ca. $2,9 \cdot 10^{24}$ Bleiatome. Wie groß ist die Durchschnittsmasse eines Bleiatoms?
 c) Welche Rechnung (a oder b) ist glaubwürdiger und warum?
- 2.14** Welches ist die größte (kleinste) dimensionsbehaftete Zahl, die du kennst? Über wie viele Größenordnungen erstrecken sich physikalisch „messbare“ Längen, Massen, Zeiten?
- 2.15** Bestimme deine Puls- und Atemfrequenz. Schätze, wie oft ein Mensch in seinem Leben atmet bzw. wie oft sein Herz schlägt. Berechne diese Werte, indem du ein mittleres Lebensalter von 70 Jahren annimmst.
- 2.16** Schätze vorerst und berechne sodann, wie viel Prozent der von der Sonne ausgesandten Strahlung unsere Erde erreicht. (Entfernung Erde-Sonne: $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ m, Erdradius $r = 6,38 \cdot 10^6$ m)
- 2.17** (Winkelfunktionen benötigt)
*In der Astronomie wird häufig die Längeneinheit **Parsec** verwendet. 1 Parsec ist die Entfernung, aus der der Radius R der Erdbahn unter einem Winkel von einer Sekunde gesehen wird. Wie groß ist ein Parsec in Einheiten von Metern bzw. Lichtjahren (Erdbahnradius $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ m)?*

c) Mittelwertrechnung (zu Band 1, Seite 13)



Der **arithmetische Mittelwert** $\bar{x}$ von n Werten $x_1, \dots, x_n$ ist

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

Die **Standardabweichung** errechnet sich aus

$$\Delta x = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}.$$

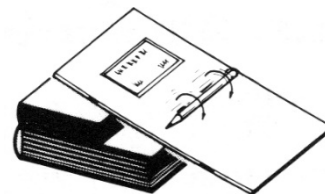
Bei einer großen Anzahl von Werten, wie sie sehr häufig vorliegen, muss diese Berechnung automatisiert werden. Moderne Taschenrechner haben bereits entsprechende **Programme**. Die Anzahl und die Größe der Werte werden über die Tastatur eingegeben. In der Praxis werden die Messwerte bereits vom Computer aufgenommen, sodass das Eintippen der Werte wegfällt.

Übungen

- 2.18** Von einer Kugel wurde die Masse zehnmal bestimmt. Dabei wurden folgende Messergebnisse erzielt: 29,23 g; 29,24 g; 29,26 g; 29,22 g; 29,24 g; 29,25 g; 29,23 g; 29,21 g; 29,23 g; 29,25 g. Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung. Gib die Masse der Kugel an!

- 2.19** Mache folgendes Experiment: Lasse einen Gegenstand eine schräge Fläche hinunterrollen (siehe Abbildung rechts).

Ermittle, wie weit der Gegenstand auf dem Tisch bei 5 Versuchen im Mittel rollt und berechne die Standardabweichung. Beobachte, wie sich bei 10, 20, 30, ... Versuchen der Mittelwert bzw. die Standardabweichung ändern. Verwende zu dieser Untersuchung ein entsprechendes Programm.



- 2.20** Berechne das Durchschnittsalter und die Durchschnittsgröße der Schüler deiner Klasse und ermittle dazu die Standardabweichung.

- 2.21** Folgende Längenmessungen sind vorgenommen worden:

17,4 m; 18,31 m; 16,29 m; 16,93 m; 18,034 m; 17,671 m; 17,33 m; 16,8 m.

a) Ermittle Mittelwert und Standardabweichung!

b) Untersuche mit dem Computerprogramm folgendes: In welchem Längenbereich muss eine weitere Messung sein, damit die Standardabweichung größer bzw. kleiner wird?

- 2.22** Folgende drei Zeitmessungen sind gemacht worden: 1 min 23 sec; 1 min 18 sec; 1 min 21 sec.

Berechne Mittelwert und Standardabweichung. Wie viele Kommastellen findest du für die Angabe des Mittelwertes für sinnvoll?

Es ist oft üblich, anstelle des **absoluten Fehlers** Δx den **relativen Fehler** $\frac{\Delta x}{\bar{x}}$ anzugeben.

Damit lassen sich Regeln der **Fehlerfortpflanzung** formulieren:

Berechnet sich der Wert einer physikalischen Größe x aus einer **Summe oder Differenz** von Teilgrößen x_i , so addieren sich die **absoluten Fehler** der Teilgrößen zum absoluten Fehler des Resultats:

$$x = x_1 \pm x_2 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad (\text{analog für mehr } x_i)$$

Ergibt sich der Endwert x aus einem **Produkt oder Quotienten**, so addieren sich die **relativen Fehler** der Teilgrößen zum relativen Fehler des Ergebnisses:

$$x = x_1 \cdot x_2 \quad \text{oder} \quad x = \frac{x_1}{x_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} + \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} \quad (\text{analog für mehr } x_i)$$

Übungen

- 2.23** Bei einer Kiste wird die Dicke d des Bodens derart gemessen, dass man die Höhe der Kiste außen ($\bar{h}_a = 45,5 \text{ cm}$, $\Delta h_a = 0,5 \text{ cm}$) und die Tiefe der Kiste innen ($\bar{h}_i = 43,4 \text{ cm}$, $\Delta h_i = 0,5 \text{ cm}$) abmisst. Wie dick ist der Boden? Gib die relativen Fehler von h_a , h_i und d , sowie den absoluten Fehler von d an.

2.24 Der Innenraum der Kiste von Übung 2.23 hat eine Länge von $\bar{l} = 90,4 \text{ cm}$ ($\Delta l = 0,4 \text{ cm}$) und eine Breite von $\bar{b} = 58,2 \text{ cm}$ ($\Delta b = 0,4 \text{ cm}$). Berechne das Volumen des Innenraums sowie dessen absoluten und relativen Fehler.

Erweiterung und Vertiefung: Allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz

(partielle Ableitung wird benötigt)

Oben haben wir die Abhängigkeit der Fehlerfortpflanzung für eine physikalische Größe x behandelt, die von zwei anderen physikalischen Größen x_1 bzw. x_2 abhängt ($x = x_1 \pm x_2$, $x = x_1 \cdot x_2$ oder $x = \frac{x_1}{x_2}$) zB $v(s, t) = \frac{s}{t}$.

Hängt eine physikalische Größe x von n anderen Größen $x_1, \dots, x_n$ ab, dh. $x = f(x_1, \dots, x_n)$ ergibt sich:

$$\Delta x_{\max} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial x}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i$$

Für die x_i sind dann die Mittelwerte $\bar{x}_i$ einzusetzen.

Die oben im Kasten angegebenen Formeln für $x = x_1 \pm x_2$, $x_1 \cdot x_2$ bzw. $x = \frac{x_1}{x_2}$ sind Spezialfälle.

(Mathematisch folgt die Formel aus einer Reihenentwicklung von $f(x_1, \dots, x_n)$; $\frac{\partial x}{\partial x_i}$ ist die partielle Ableitung von $x = f(x_1, \dots, x_n)$ nach der Variablen x_i).

Bei der Berechnung von $\Delta x_{\max}$ werden alle Einzelfehler addiert, es wird also der **schlimmstmögliche Fall** angenommen.

Wenn es sich um viele **unabhängige Einzelfaktoren** x_i handelt, ist das sehr unwahrscheinlich. Man verwendet in der Praxis das **Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß**:

$$\Delta x_{\text{Gauß}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}$$

(Mathematisch folgt die Formel aus der geometrischen Addition der Einzelfehler.)

Wenn man $f(x_1, \dots, x_n)$ als Vektor mit den Komponenten x_i auffasst, entspricht $\Delta x_{\text{Gauß}}$ dem Betrag dieses Vektors. Da der Betrag eines Vektors immer kleiner ist als die Summe seiner absolut genommenen Komponenten – dies entspricht $\Delta x_{\max}$ – gibt $\Delta x_{\text{Gauß}}$ eine „mildere“ Schätzung als $\Delta x_{\max}$.

Beispiele

B 2.8 Wir berechnen $\Delta v_{\max}$ und $\Delta v_{\text{Gauß}}$ für $v = \frac{s}{t}$

a) allgemein und dann

b) für die Messwerte $\bar{s} = 100 \text{ m}$, $\Delta s = 0,5 \text{ m}$; $\bar{t} = 10 \text{ s}$, $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.

$$\text{a) } \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}$$

$$\Delta v_{\max} = \frac{1}{\bar{t}} \cdot \Delta s + \frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} \cdot \Delta t \quad (\bar{t} \text{ bzw. } \bar{s} \text{ sind die Mittelwerte von } t \text{ bzw. } s.)$$

$$\Delta x_{\text{Gauß}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} \right)^2 \cdot (\Delta s)^2 + \left(\frac{\bar{s}}{\bar{t}^2} \right)^2 \cdot (\Delta t)^2} + \sqrt{\frac{1}{\bar{t}^2} \cdot (\Delta s)^2 + \frac{\bar{s}^2}{\bar{t}^4} \cdot (\Delta t)^2}$$

b) Einsetzen der Messwerte:

$$\Delta v_{\max} = \frac{1}{10} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + \frac{100}{10^2} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = (0,05 + 0,1) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Delta v_{\text{Gauß}} = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cdot (0,5)^2 + \frac{100^2}{10^4} \cdot (0,1)^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \sqrt{0,0025 + 0,01} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$\Delta v_{\text{Gauß}}$ ist – wie erwartet – kleiner als $\Delta v_{\max}$.

B 2.9 Für die Gleichung der Zentripetalkraft $F = \frac{m \cdot v^2}{r}$ (m Masse, v Tangentialgeschwindigkeit, r Abstand des rotierenden Körpers) berechnen wir $\Delta F_{\max}$:

$$\frac{\partial F}{\partial m} = \frac{v^2}{r} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{2m \cdot v}{r} \quad \frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{m \cdot v^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad \Delta v_{\max} = \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} \cdot \Delta m + \frac{2\bar{m} \cdot \bar{v}}{\bar{r}} \cdot \Delta v + \frac{\bar{m} \cdot \bar{v}^2}{\bar{r}^2} \cdot \Delta r$$

d Rechengenauigkeit (zu Band 1, Seite 11)

Beispiel

B 2.10 Die Seiten eines Rechtecks sind mit $a = 1,555 \text{ cm}$ und $b = 2,2 \text{ cm}$ angegeben. Berechne den Flächeninhalt!

Rein rechnerisch ergibt sich

$$A = a \cdot b = 1,555 \cdot 2,2 \text{ cm}^2 = 3,421 \text{ cm}^2.$$

Dieses Ergebnis täuscht aber eine zu große Genauigkeit vor und ist deshalb irreführend.

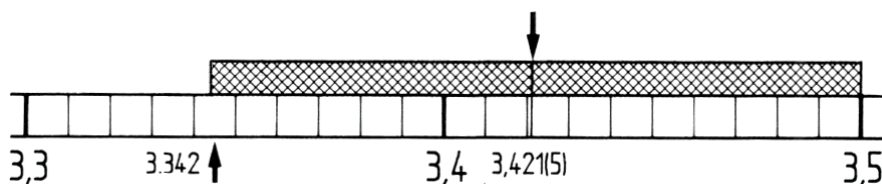
$b = 2,2 \text{ cm}$ bedeutet, dass b zwischen den Werten $2,150 \text{ cm}$ und $2,250 \text{ cm}$ liegen kann (a zwischen $1,5545 \text{ cm}$ und $1,5555 \text{ cm}$). Dementsprechend kann der Flächeninhalt zwischen

$$A = 1,5545 \cdot 2,15 \text{ cm}^2 = 3,342 \text{ cm}^2 \text{ und}$$

$$A = 1,5555 \cdot 2,250 \text{ cm}^2 = 3,500 \text{ cm}^2 \text{ liegen.}$$

Unser Resultat ($A = 3,421 \text{ cm}^2$) bedeutet aber, dass der Flächeninhalt nur zwischen

$$A = 3,4205 \text{ cm}^2 \text{ und } 3,4215 \text{ cm}^2 \text{ liegen kann.}$$



Diesen Widerspruch kann man damit beheben, dass man folgende Regel beachtet:

Die angegebenen (**signifikanten**) Stellen des am ungenauesten bekannten Eingabewertes bestimmen die Genauigkeit des Resultats.

Im obigen Beispiel ist die Länge a auf 4 Stellen bekannt, die Länge b auf 2 Stellen. Es ist in diesem Falle sinnvoll, den Flächeninhalt auf 2 Stellen genau anzugeben, dh. $A = 3,4 \text{ cm}^2$. Dies gibt an, dass der Flächeninhalt zwischen $A = 3,35 \text{ cm}^2$ und $A = 3,45 \text{ cm}^2$ liegen kann. Wir sehen, dass diese Grenzen ähnlich den oben berechneten sind. Die angegebene Regel stellt eine gute Richtlinie dar.

Übungen

- 2.25** Eine elektronische Stoppung eines Hundertmeterläufers ergibt eine Zeit von $t = 10,583 \text{ s}$; eine gleichzeitige Handstoppung $t = 10,6 \text{ s}$. Welche Durchschnittsgeschwindigkeiten ergeben sich aus beiden Stoppungen? Wie genau muss in beiden Fällen die Distanz abgemessen sein, um durch die Längenbestimmung keine größere Unsicherheit zu erhalten als durch die Zeitmessung?
- 2.26** Überdenke dein Resultat von Übung 2.20. Kann man das Durchschnittsalter genauer angeben oder die Durchschnittsgröße?
- 2.27** Von einem Holzwürfel mit $4,5 \text{ cm}$ Seitenlänge soll die Masse m bestimmt werden. Ist das Ergebnis für die Masse das gleiche, wenn man für die Dichte ρ (Dichte = Masse/Volumen) $\rho = 0,9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $0,90 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $0,900 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ oder $0,9000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ angibt?

e) Masse und Dichte (zu Band 1, Kap. 2.5, Seite 15 bzw. Kap. 2.6, Seite 16)

Masse m ist eine der Basiseinheiten des SI	$[m] = \text{kg}$
Dichte $\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$	$[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Beispiel

B 2.11 Ein Stück Messing besteht aus 50 g Kupfer und 30 g Zink. Wie groß ist die Dichte dieser Messinglegierung? (Die Dichte von Kupfer ist $\rho_{\text{Cu}} = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 8,9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, die Dichte von Zink $\rho_{\text{Zn}} = 7100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 7,1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$)
Wir berechnen zuerst die Volumina von Kupfer und Zink aus

$$V = \frac{m}{\rho} : V_{\text{Cu}} = 5,6 \text{ cm}^3, V_{\text{Zn}} = 4,2 \text{ cm}^3.$$

Daraus ergibt sich das Gesamtvolumen vom Messingstück zu $9,8 \text{ cm}^3$; mit der Gesamtmasse von 80 g erhalten wir als Dichte

$$\rho = \frac{80 \text{ g}}{9,8 \text{ cm}^3} = 8,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = \underline{8200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

Übungen

2.28 Was schätzt du: Hat die Luft in deinem Klassenzimmer mehr Masse als du oder weniger? Mache die Rechnung ($\rho_{\text{Luft}} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

2.29 Welche Dichte hat Bronze, wenn sie zu 70 % aus Kupfer und zu 30 % aus Zinn besteht? (Die Dichte des Kupfers ist $8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, die des Zinns $7300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

2.30 Schätze, um wie viel die mittlere Dichte der Sonne größer (kleiner) ist als die mittlere Dichte der Erde oder des Mondes. Berechne die genauen Werte aus den folgenden Daten:

	Masse (kg)	Radius (m)
Sonne	$1,99 \cdot 10^{30}$	$6,96 \cdot 10^8$
Erde	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,37 \cdot 10^6$
Mond	$7,34 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$

2.31 Die Dichte von Silber ist $10,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

a) Schätze die Dichte eines Silberkerns.

b) Berechne die Dichte eines Silberkerns (Silber hat 108 Kernteilchen, der Radius eines Silberkerns ist $6,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$).

2.32 Ein Neutronenstern hat ungefähr die Masse einer Sonne, hat aber nur einen Radius von etwa 10 km. Berechne seine Dichte (siehe Übung 2.30). Vergleiche die Dichte eines Neutronensterns mit der Dichte von Kernmaterie (siehe Übung 2.31).

2.33 Ein kugelförmiger Heliumballon (${}^4_2\text{He}$) hat einen Radius von 2,2 m.

a) Wie schwer ist das Heliumgas darin? Die Dichte von Helium ist $0,18 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

b) Die Dichte von Luft ist $1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Wieviel Last kann der Ballon tragen, um trotzdem noch zu fliegen?